CHƯƠNG I. HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1.1. Khái niệm hàm số

Trong lĩnh vực khoa học chúng ta thường gặp các đại lượng đo được bằng số. Khi nghiên cứu quy luật thay đổi giá trị của các đại lượng đó, người ta thường dùng chữ để ký hiệu số đo của chúng. Chẳng hạn, trong vật lý chúng ta dùng chữ U để ký hiệu điện thế của dòng điện, R để ký hiệu điện trở, ... Người ta phân tích quy luật thay đổi giá trị của các đại lượng đo được bằng số có quan hệ với nhau như: sự thay đổi giá trị của đại lượng này kéo theo sự thay đổi giá trị của đại lượng kia theo một quy luật nhất định. Chẳng hạn, hiệu điện thế thay đổi thì cường độ dòng điện thay đổi theo. Sự phụ thuộc của đại lượng này vào các đại lượng khác thường được biểu diễn dưới dạng hàm số.

Ta xét các ví dụ sau:

1. Diện tích S của hình tròn phụ thuộc vào bán kính r của nó theo công thức $S = \pi r^2$. Mỗi số dương r sẽ cho một giá trị duy nhất S, ta nói S là hàm của r.

2. Nhiệt lượng tỏa ra trên dây dẫn phụ thuộc vào điện trở của dây, cường độ dòng điện và thời gian dẫn điện theo công thức $Q = RI^2t$. Cứ mỗi bộ ba số R, I, t sẽ cho một giá trị duy nhất Q, ta nói Q là hàm của R, I, t

Định nghĩa. Cho $X, Y(\neq \phi)$ là hai tập hợp số. Một *hàm số* f từ X đến Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi giá trị $x \in X$ với một và chỉ một giá trị $y \in Y$.

Ký hiệu: $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ hoặc $y = f(x)$

Tập hợp X được gọi là *miền xác định* (MXĐ) của hàm số f. Số y tương ứng với số x theo quy tắc f được gọi là *giá trị của hàm số f tại điểm x*, ký hiệu là $f(x)$. Tập hợp các giá trị của $f(x), \forall x \in X$ gọi là *miền giá trị* của hàm số, ký hiệu $f(X)$. Nói chung $f(X) \subset Y$. $x \in X$ gọi là biến số độc lập (hay đối số), $y \in Y$ gọi là biến số phụ thuộc (hay hàm số).

Nếu $X \subseteq R, Y \subseteq R$ thì f được gọi là hàm số một biến số thực.

Nếu $X \subseteq C, Y \subseteq C$ thì f được gọi là hàm số một biến số phức.

Nếu $X \subseteq R^n, Y \subseteq R$ thì f được gọi là hàm số nhiều biến số thực.

trong đó một phần tử $x \in R^n$ là một bộ số thực $(x_1, x_2, ..., x_n)$

$x_1, x_2, ..., x_n$ là các biến độc lập.

Trong trường hợp $n = 2$, người ta thường dùng ký hiệu $z = f(x, y)$.

Một hàm số $y = f(x)$ có thể cho bằng các phương pháp khác nhau, tùy theo f chỉ cách tương ứng giữa $x \in X$ và $y \in Y$.

Nếu f chỉ các quy tắc nhất định để ứng với mỗi x ta có một giá trị $f(x)$ thì f gọi là được cho bằng một công thức hay một biểu thức giải tích. Khi đó miền xác định của hàm số là tập hợp các giá trị của biến số làm cho biểu thức giải tích đó có nghĩa

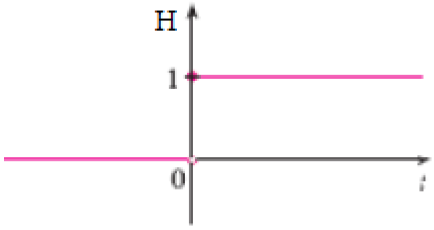
Ví dụ 1.1.

1. $y = x^2$ có MXĐ $X = R$
2. $y = \ln(1 - x^2)$ có MXĐ $X = (1,1)$
3. $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ có MXĐ là hình tròn tâm O bán kính bằng 1.

Một hàm số có thể được cho dưới dạng miền xác định gồm các tập con rời nhau và trên mỗi tập con đó quy tắc xác định giá trị tương ứng của hàm số tại mỗi điểm được biểu diễn bằng một biểu thức riêng.

Ví dụ 1.2. $H(t)=\begin{cases}0 & khi\ \ t<0\\ 1 & khi\ \ x\geq 0\end{cases}$

(Hàm này được gọi là hàm Heaviside, đặt theo tên của một kỹ sư điện Oliver Heaviside,được sử dụng trong việc nghiên cứu các mạch điện,cho sự biến đổimột cách đột ngột của dòng điện hoặc điện áp ngay khi một công tắc được bật lên)



Ngoài phương pháp cho bằng một công thức thường dùng trong giải tích, một hàm số có thể cho bằng những phương pháp khác nhau,chẳng hạn cho bằng một bảng tương ứng giữa $x\in X$, $y\in Y$ như các bảng số thường dùng.

Về tương quan hàm số, ngoài cách cho dưới dạng "*hiển*" $y=f(x)$ người ta còn cho hàm số dưới dạng sau:

a) Cho dưới dạng ẩn.

Hàm ẩn một biến. Cho y là hàm của biến x được biểu diễn dưới dạng phương trình: $F(x,y)=0$

Hàm ẩn n biến. Cho y là hàm của các biến $x_1,x_2,...,x_n$ được biểu diễn dưới dạng phương trình: $F(x_1,x_2,...,x_n,y)=0$

Ví dụ 1.3.

Cho hàm ẩn $y=f(x)$ được xác định bởi phương trình: $y=e^{xy}+\ln(y^2+1)$

Cho hàm ẩn $z=f(x,y)$ được xác định bởi phương trình :

$$x^2+2y^2+3z^2+2x+4y-6z=0$$

b) Cho bởi phương trình tham số. Cho y là hàm của x, nhưng cả y và x đều biểu diễn qua một biến trung gian.

Ví dụ 1.4. $\begin{cases}x=e^t+1\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$

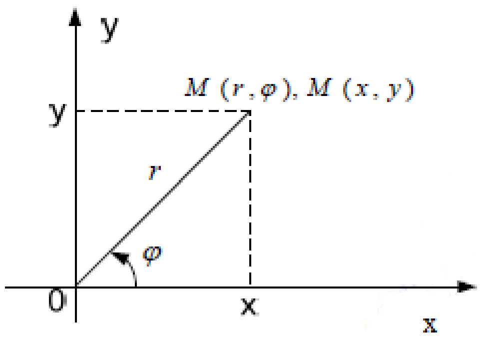
c) Cho dưới dạng tọa độ cực.

Ngoài hệ tọa độ Đề các vuông góc, người ta còn dùng hệ tọa độ cực.

Trong mặt phẳng lấy 1 điểm O làm gốc, nửa đường thẳng đi qua gốc O và trên đó chọn một chiều dương từ trái sang phải.

Xét điểm M trong mặt phẳng.

Ký hiệu: $\left|\overrightarrow{OM}\right|=r$, và góc $\varphi(0\leq\varphi\leq 2\pi)$ là góc lập bởi $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{Ox}$. φ gọi là góc cực, r gọi là bán kính cực. Cặp giá trị (r,φ) được gọi là tọa độ cực của điểm M. Hệ gồm điểm O và trục Ox gọi là hệ tọa độ cực.



Dễ thấy rằng giữa tọa độ cực và tọa độ Đècác có mối liên hệ:

$x = r\cos\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r\sin\varphi, \varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$

Mối liên hệ giữa r và φ được gọi là hàm số cho trong tọa độ cực.

Theo công thức liên hệ trên, từ phương trình tọa độ cực có thể đưa về phương trình $F(x, y) = 0$ của nó và ngược lại.

Ví dụ 1.5. Xét hàm số: $r = 2R\cos\varphi (R > 0)$

Thay $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, ta có:

$x^2 + y^2 - 2Rx = 0$. Vậy trong hệ tọa độ cực $r = 2R\cos\varphi$ là phương trình của đường tròn tâm $(R, 0)$, bán kính R.

1.2. Hàm số một biến số thực.

1.2.1. Đồ thị của hàm số.

Xét hàm số $y = f(x)$ xác định trên X. Ta gọi *đồ thị* của hàm số f là tập hợp tất cả các điểm $M(x, y)$ của mặt phẳng tọa độ có hoành độ $x \in X$,tung độ $y = f(x)$.

Ví dụ 1.6.

a) $y = ax + b$: đồ thị là một đường thẳng.

b) $y = ax^2 + bx + x, a \neq 0$: đồ thị là một parabol

c) $y = \dfrac{a}{x}$: đồ thị là một hypebol

Chú ý. Một hàm số cũng có thể được cho bằng đồ thị của nó. Khi đó mỗi điểm của đồ thị sẽ cho cách tương ứng giữa $x \in X$ và $y \in Y$.

Người ta sử dụng đồ thị để minh họa bằng hình ảnh các đặc trưng cơ bản của sự phụ thuộc hàm số giữa các biến số. Nhìn vào đồ thị ta dễ dàng quan sát xu hướng biến thiên của hàm số khi biến độc lập thay đổi giá trị.

1.2.2. Hàm số ngược

Xét hàm số $y = f(x)$ với miền xác định X và miền giá trị Y. Nếu với mỗi giá trị $y \in Y$ chỉ tồn tại duy nhất một giá trị $x \in X$ sao cho $f(x) = y$, tức là phương trình $f(x) = y$ có một nghiệm duy nhất x trong miền X nên có thể đặt tương ứng một phần tử $y \in Y$ với một phần tử $x \in X$. Phép đặt tương ứng đó xác định một hàm số từ Y sang X, hàm số này được gọi là *hàm số ngược* của hàm f và được ký hiệu là $f^{-1}: Y \to X$, nghĩa là:

$f^{-1}: y \mapsto x = f^{-1}(y),$ trong đó y là biến độc lập và x là hàm số.

Từ định nghĩa hàm số ngược, ta có: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Trong toán học, ta thường dùng ký hiệu x để chỉ biến độc lập và ký hiệu y để chỉ hàm số. Do vậy thay cho cách viết hàm ngược dưới dạng $x = f^{-1}(y)$, ta viết $y = f^{-1}(x)$

Ví dụ 1.7.

a) $y = 2x + 1$ có hàm số ngược là $y = \dfrac{x-1}{2}$.

b) $y = x^2$ với $y > 0$, phương trình $x^2 = y$ có 2 nghiệm. Suy ra hàm số $y = x^2$ không có hàm số ngược trên R.

c) $y = a^x$ có hàm số ngược là $y = \log_a x$.

d) $y = x^3$ có hàm số ngược là $y = \sqrt[3]{x}$

Điểm $M(x, y)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f^{-1}(x)$ khi và chỉ khi $M^{'}(y, x)$ thuộc đồ thị $y = f(x)$. Trên mặt phẳng tọa độ hai điểm $M, M^{'}$ đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất. Từ đó đi đến kết luận:

Đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = f(x)$ qua đường phân giác thứ nhất.

Hàm số ngược của các hàm số lượng giác:

1. Hàm số $y = \sin x$ với miền xác định $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ có hàm ngược là hàm số $y = \arcsin x$ có miền xác định $X = [-1,1]$. $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

2. Hàm số $y = \cos x$ với miền xác định $X = [0, \pi]$ có hàm ngược là hàm số $y = \arccos x$ có miền xác định $X = [-1,1]$. $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$

3. Hàm số $y = \tan x$ với miền xác định $X = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ có hàm ngược là hàm số $y = \arctan x$ có miền xác định $X = R$. $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

4. Hàm số $y = \cot x$ với miền xác định $X = (0, \pi)$ có hàm ngược là hàm số $y = arc\cot x$ có miền xác định $X = R$. $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

Quy ước: $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$, $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$arc\cot(+\infty) = 0$, $arc\cot(-\infty) = \pi$

1.2.3. Hàm số hợp.

Cho hàm số $g : X \to Y$ và hàm số $f : Y \to Z$ với $X \subseteq R, Y \subseteq R, Z \subseteq R$. Khi đó hàm số $h : X \to Z$ được định nghĩa bởi: $h(x) = f\left[g(x)\right], x \in X$ được gọi là *hàm hợp* của hàm số f và hàm số g.

Ký hiệu: $h(x) = f\left[g(x)\right]$ hay $h(x) = (fog)(x),\ x \in X$

Ví dụ 1.8. $f : x \mapsto x^2 + 1;\quad g : x \mapsto \sin x$

$$(fog)(x) = (\sin x)^2 + 1$$

1.2.4. Các loại hàm đặc biệt

a) Hàm số đơn điệu.

Cho hàm số $y = f(x)$ trong miền X, $f(x)$ gọi là *đơn điệu không giảm* (*không tăng*) trong X nếu: $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) (f(x_1) \ge f(x_2))$.

Trường hợp không có dấu '=', $f(x)$ gọi là *đơn điệu tăng* (giảm) trong X .

Ví dụ 1.9.

a) Hàm số $y = x^2$ đơn điệu giảm trên khoảng $(-\infty, 0)$ và đơn điệu tăng $(0, +\infty)$.

b) Hàm số $y = \frac{1}{x}$ đơn điệu giảm trên các khoảng $(-\infty, 0)$ và $(0, +\infty)$

b. Hàm số chẵn,lẻ.

Giả sử $X \subseteq R$, X nhận gốc O làm tâm đối xứng.

Hàm $f(x)$ được gọi là *chẵn* nếu : $f(-x) = f(x), \forall x \in X$ là *lẻ* nếu $f(-x) = -f(x)$.

Rõ ràng đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua trục oy, đồ thị hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ.

Ví dụ 1.10.

a) $y = \sin x, y = x$ là các hàm số lẻ

b) $y = \cos x, y = x^2$ là các hàm số chẵn

c) Hàm số tuần hoàn

Hàm số $f(x)$ gọi là *hàm tuần hoàn* trên X, nếu tồn tại hằng số dương p sao cho $f(x+p) = f(x), \forall x \in X$.

Số dương T bé nhất trong các số p gọi là *chu kì* của $f(x)$.

Ví dụ 1.11.

a) Các hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

b) Các hàm số $y = \tan x, y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π

c) Hàm số $y = \sin \alpha x$ tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{|\alpha|}$

1.2.5.Các hàm số sơ cấp

a) Các hàm số sơ cấp cơ bản

1. Hàm lũy thừa $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$ $(\alpha = const)$

Miền xác định của hàm số phụ thuộc vào α, chẳng hạn $\alpha = n \in N$ hoặc $\alpha = \frac{1}{n'}$, n lẻ thì y xác định $\forall x \in R$. Nhưng $\alpha = \frac{1}{n}$, n chẵn thì y chỉ xác định $\forall x \geq 0$.

Rõ ràng $\forall \alpha \in R, y$ xác định $\forall x > 0$.

2. Hàm số mủ $y = a^x, a > 0, a \neq 1$

Hàm số mủ xác định $\forall x \in R$ và luôn dương.

Nếu $a > 1$ thì hàm số đơn điệu tăng. Nếu $a < 1$ thì hàm số đơn điệu giảm.

3. Hàm logarit $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

Hàm logarit xác định $\forall x > 0, x \in R$.

Nếu $a > 1$ thì hàm số đơn điệu tăng. Nếu $a < 1$ thì hàm số đơn điệu giảm.

4. Các hàm lượng giác.

Các hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ xác định $\forall x \in R.$

Hàm số $y = \tan x$ xác định $\forall x \neq k\pi,\ k \in Z$

Hàm số $y = \cot x$ xác định $\forall x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$

5. Các hàm lượng giác ngược

Các hàm số $y = \arcsin x, y = \arccos x$ xác định $\forall x \in [-1,1]$

Các hàm số $y = \arctan x, y = \arccos x$ xác định $\forall x \in R.$

b. Các hàm số sơ cấp

Cho 2 hàm số f và g, gọi tổng của f và g, viết $f+g$, hiệu viết $f-g$, tích viết fg và thương viết là $\frac{f}{g}$ là các hàm số được định nghĩa như sau:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x).g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Định nghĩa. Ta gọi *hàm số sơ cấp* là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia), các phép lấy hàm số hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng.

Ví dụ 1.12. Các hàm hyperbole được ký hiệu và xác định như sau:

$$y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = thx = \frac{shx}{chx}; \quad y = \coth = \frac{1}{thx}$$

là các hàm số sơ cấp, gọi là Sin-hyperbole; cosin- hyperbole; tg-hyperbole; cotg-hyperbole.

Các hàm này xác định $\forall x \in R$, trừ $y = \coth x$ không xác định khi $x = 0$.

Các hàm hyperbole có các tính chất tương tự như hàm lượng giác.

$$ch^2 x - sh^2 x = 1; \ \frac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x; \ \frac{1}{sh^2 x} = \coth^2 x$$

$$ch(x \pm y) = chxchy \pm shxshy, \ ch2x = ch^2 x + sh^2 x$$

$$sh(x \pm y) = shxchy \pm chxshy, \ sh2x = 2chxshx$$

Trong các hàm số sơ cấp, ta chú ý đến 2 loại hàm số: Hàm đa thức và hàm số hữu tỉ.

Hàm đa thức: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, a_i \in R, i = \overline{1,n}, \ a_n \neq 0.$

Hàm hữu tỉ: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức.

1.3. Giới hạn và sự liên tục của hàm số một biến số thực

1.3.1. Khái niệm giới hạn của hàm số.

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong miền X. Số L (hữu hạn) gọi là *giới hạn của* $f(x)$ khi x dần tới x_0 và viết là $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ nếu với bất kì $\varepsilon > 0$ cho trước tìm được $\delta > 0$ sao cho khi $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ví dụ 1.13. Cho $f(x) = x$. Chứng minh $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$ chỉ cần chọn $\delta = \varepsilon$ thì khi $|x - x_0| < \delta$

thì $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$

Định nghĩa 2. Số L gọi là giới hạn của $f(x)$, khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset X$, $x_n \neq x_0$ mà $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$

Định nghĩa này gọi là định nghĩa theo ngôn ngữ "dãy", còn định nghĩa 1 gọi là định nghĩa theo ngôn ngữ "ε, δ".

Chú ý. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì L là duy nhất.

Ví dụ 1.14. Chứng minh $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ không tồn tại

Theo định nghĩa, chỉ cần chỉ ra 2 dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$, $a_n \to 0, \ b_n \to 0$ mà

$$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{a_n} \neq \lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{b_n}$$

Xét dãy: $a_n = \dfrac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} \to 0$

$$b_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$$

Khi đó: $\lim\limits_{n \to \infty} \sin \dfrac{1}{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} 2n\pi = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{b_n}$$

Vậy $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ không tồn tại.

Chú ý. Định nghĩa trên không đòi hỏi $f(x)$ phải xác định tại x_0. Có trường hợp $f(x)$ không xác định tại x_0 nhưng vẫn có giới hạn tại đó.

Chẳng hạn xét : $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}$

Để ý rằng điểm $x = 0$ không thuộc miền xác định của $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$. Nhưng với $x \neq 0$ thì $f(x) = |x|$. Do vậy dùng kết quả của ví dụ 1.13 suy ra $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

1.3.2. Giới hạn một phía.

Trong các định nghĩa trên ta xét $x \to x_0$ một cách bất kì.

Nếu $x \to x_0,\ x < x_0 (x > x_0)$ mà $f(x) \to L$ thì L gọi là giới hạn bên trái (phải) của $f(x)$ tại x_0.

Ký hiệu: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ ($\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$)

Rõ ràng $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$

1.3.3. Các quy tắc tính giới hạn.

Cho $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = L_1,\ \lim_{x\to x_0} f_2(x) = L_2,\quad L_1, L_2$ hữu hạn, x_0 có thể hữu hạn hoặc vô cùng.

Khi đó: *i)* $\lim_{x\to x_0} Cf_1(x) = CL_1$

ii) $\lim_{x\to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = L_1 + L_2$

iii) $\lim_{x\to x_0} (f_1(x) f_2(x)) = L_1 L_2$

iv) $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

Chú ý. Nếu hàm số sơ cấp $f(x)$ xác định tại điểm x_0 thì $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

1.3.4. Khử dạng vô định

Khi tính giới hạn, cần lưu ý các dạng vô định. Để tính các giới hạn đó ta phải biến đổi về dạng cho phép áp dụng các quy tắc tính giới hạn nêu trên.

Các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty, 1^\infty$ và còn gặp các dạng vô định khác: $0^0, \infty^0$

Để khử dạng vô định ta sẽ dùng biến đổi đại số và dùng các giới hạn đặc biệt sau:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

1^0. Dạng $\frac{0}{0}$

Ví dụ 1.15.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2==\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}=1$

2^0. Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Ví dụ 1.16.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-4}{5x^3+2x+9}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^3}}{5+\frac{2}{x^2}+\frac{9}{x^3}}=\dfrac{2}{5}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5+x^2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{0}{1}=0$

3^0. Dạng $\infty-\infty$

Ví dụ 1.1.7.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

4^0. Dạng 1^∞

Ví dụ 1.18.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-3}\cdot\frac{-3(2x+1)}{x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3(2x+1)}{x+2}}=e^{-6}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}==e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1)}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

1.3.5. Vô cùng bé và vô cùng lớn

a) *Định nghĩa.*

Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là một *vô cùng bé*, viết tắt là VCB khi $x\to x_0$ nếu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Hàm số $\beta(x)$ được gọi là một *vô cùng lớn*, viết tắt là VCL khi $x\to x_0$ nếu: $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.

Dĩ nhiên ở đây x_0 có thể là hữu hạn hoặc vô cùng.

Dễ dàng kiểm tra rằng nếu $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to x_0$ thì $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ là một VCL khi $x \to x_0$; ngược lại nếu $\beta(x)$ là một VCL khi $x \to x_0$ thì $\dfrac{1}{\beta(x)}$ là một VCB khi $x \to x_0$.

Hơn nữa, các tính chất về tổng, tích, thương các VCB cũng như tổng, tích, thương các VCL cũng được suy diễn trực tiếp từ tính chất tổng, tích, thương các hàm số có giới hạn. Chúng ta sẽ xét *tốc độ hội tụ* về số không của các VCB trong một quá trình $x \to x_0$ và *tốc độ tiến* ra vô cùng của các VCL cũng tương tự.

b) *So sánh các VCB*

Cho $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$.

1. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, ta nói $\alpha(x)$ có bậc cao hơn $\beta(x)$ và viết là

$\alpha(x) = o(\beta(x)),\ x \to x_0$

Khi đó ta cũng nói rằng $\beta(x)$ có bậc thấp hơn $\alpha(x)$ khi $x \to x_0$.

2. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \neq 0$, ta nói $\alpha(x)$ cùng bậc với $\beta(x)$ và viết là

$\alpha(x) = O(\beta(x)),\ x \to x_0$

Đặc biệt nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì ta nói rằng $\alpha(x)$ tương đương với $\beta(x)$ và viết là

$\alpha(x) \sim \beta(x)),\ x \to x_0$

Ví dụ 1.19. khi $x \to 0$, $\sin x \sim x$, $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$,

$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{n} x$

Định lí. Nếu $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_2(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$ và $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$, $\beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$

Áp dụng định lí trên, ta có thể tìm giới hạn của dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Ví dụ 1.20. Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin 2x}{1 - \cos x}$

Ta có: $x \sin 2x \sim 2x^2\ (x \to 0)$

$1 - \cos^2 x \sim \dfrac{x^2}{2}\ (x \to 0)$

Nên: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin 2x}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{\dfrac{x^2}{2}} = 4$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{\ln(1+x)}$

Ta có: $e^{3x} - 1 \sim 3x\ (x \to 0)$; $\ln(1+x) \sim x\ (x \to 0)$

Nên: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan 3x)}{5x+\sin^2 x}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan 3x)}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan 3x)}{\tan 3x}.\dfrac{\tan 3x}{3x}=1$, nên: $\ln(1+\tan 3x)\sim 3x\ (x\to 0)$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$, tức là $5x+\sin^2 x\sim 5x\ (x\to 0)$

Vậy: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan 3x)}{5x+\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$

1.3.6. Hàm số liên tục

a) Định nghĩa.

i) Hàm số $y=f(x)$ xác định trên X được gọi là *liên tục* tại $x_0\in X$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Như vậy để hàm liên tục tại x_0 thì $f(x)$ phải xác định tại x_0, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$. Thiếu đi một trong các điều kiện đó thì hàm số $f(x)$ được gọi là *gián đoạn* tại x_0

ii) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng (a,b) nếu liên tục tại $\forall x\in(a,b)$.

iii) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a,b]$ nếu liên tục trên (a,b), liên tục phải tại $x=a$ $\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)\right)$ và liên tục trái tại $x=b$ $\left(\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)\right)$.

Chú ý. Mọi hàm số sơ cấp liên tục trên miền xác định của nó.

Ví dụ 1.21.

a) Hàm $f(x)=\ln(x^2-1)$ liên tục trên khoảng $(-1,1)$.

b) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\tan x}{\ln(1+x^2)}: & x\neq 0\\ 2a-1 \quad : & x=0\end{cases}$

Hàm $f(x)$ xác định với mọi $x\in R$.

Với $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{x\tan x}{\ln(1+x^2)}$ là hàm sơ cấp nên $f(x)$ liên tục $\forall x$

Với $x=0$, để $f(x)$ liên tục tại $x=0$ thì: $2a-1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

$\Rightarrow a=1$

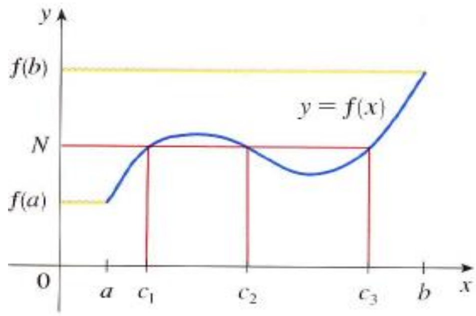
Vậy với $a=1$ thì hàm số $f(x)$ liên tục $\forall x\in R$.

b) Tính chất của hàm liên tục trên một khoảng đóng.

Định lý Weierstrass. Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ thì nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong đoạn đó.

Định lý về giá trị trung gian của hàm số.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ và $f(a)\neq f(b)$. Khi đó với mọi số N nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a,b)$ sao cho $f(c)=N$.



Hệ quả. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ và $f(a).f(b)<0$. Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a,b)$ sao cho $f(c)=0$.

Tính chất này thường được dùng để giải gần đúng phương trình $f(x)$ khi biết khoảng chứa nghiệm.

Ví dụ 1.22. Chứng minh rằng phương trình $x^4-x-1=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(1,2)$.

Hàm số $f(x)=x^4-x-1$ liên tục trên R, nên liên tục trên đoạn $[1,2]$.

Ta có: $f(1)=-1;\ f(2)=13\Rightarrow f(1).f(2)=-13<0$.

Từ hệ quả trên ta suy ra phương trình $x^4-x-1=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(1,2)$.

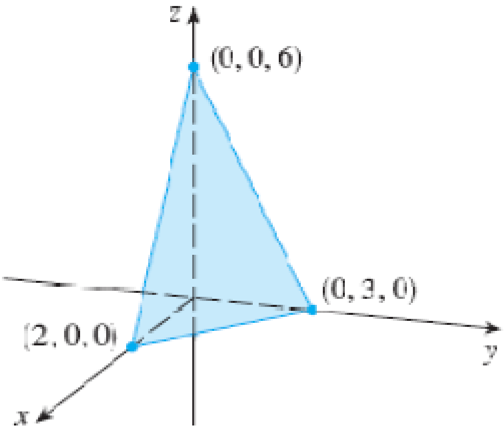
1.4. Hàm số hai biến số thực

1.4.1. Đồ thị hàm số

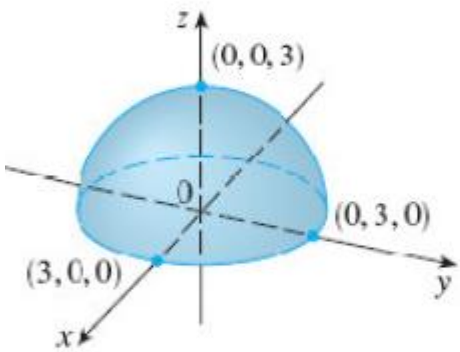
Cho hàm 2 biến $z=f(x,y)$ với $(x,y)\in D\subseteq R^2$. Tập tất cả các điểm $(x,y,z)\in R^3$ với $z=f(x,y)$ gọi là đồ thị của hàm số đã cho. Đồ thị của hàm 2 biến thường là một mặt cong trong không gian 3 chiều $Oxyz$.

Ví dụ 1.23.

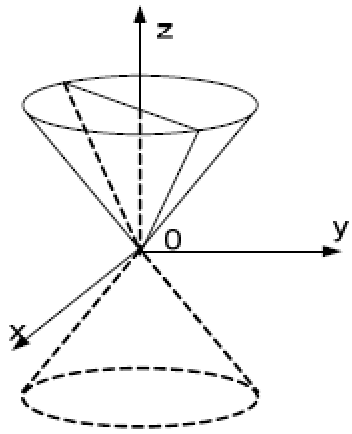
a) $z=6-3x-2y$, đồ thị là một mặt phẳng



b) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, đồ thị là nửa trên của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$



c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$, đồ thị là mặt nón bậc 2



1.4.2. Giới hạn và sự liên tục của hàm hai biến

Cho hàm số $z=f(x,y)$ xác định trên $D\subset R^2$. Ta nói $f(x,y)$ có giới hạn L khi $M(x,y)$ dần tới $M_0(x_0,y_0)$ nếu:

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ sao cho $d(M_0,M)<\delta\Rightarrow|f(M)-L|<\varepsilon$

hay $\forall M_n(x_n,y_n), M_n\neq M_0,\ M_n\to M_0\Rightarrow f(M_n)\to L$

Ký hiệu:

$\underset{M\to M_0}{Lim} f(M)=L$ hay $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim} f(x,y)=L$

trong đó $d(M_0,M)$ là khoảng cách giữa 2 điểm $M(x,y)$, $M_0(x_0,y_0)$.

$d(M_0,M)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm một biến số. Chẳng hạn $\dfrac{1}{x^2+y^2}\to+\infty$ khi $(x,y)\to(0,0)$

Các định lí về giới hạn của tổng, tích, thương đối với hàm một biến số cũng đúng cho hàm hai biến số.

Ví dụ 1.24. Tìm $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lim}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Ta có: $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 1,\forall(x,y)\neq(0,0)$

Nên $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y|\leq|y|$

Suy ra: $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lim}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

Giả sử hàm số $z=f(x,y)$ xác định trên $D\subseteq R^2$, $M_0(x_0,y_0)\in D$. Hàm số $f(x,y)$ được gọi là liên tục tại $M_0(x_0,y_0)$ nếu: $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Hàm số không liên tục tại $M_0(x_0,y_0)$ thì gọi là gián đoạn tại $M_0(x_0,y_0)$.

Hàm số $z=f(x,y)$ gọi là liên tục trong một miền nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc miền đó.

Hàm số hai biến số liên tục cũng có những tính chất như hàm số một biến số liên tục. Chẳng hạn, nếu hàm số hai biến liên tục trong một miền đóng, bị chặn thì nó đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong miền ấy.

Bài tập.

Câu 1. Xét xem hàm số nào tuần hoàn và tìm chu kì của nó.

1) $f(x) = 10\sin 3x$

2) $g(x) = \sin^2 x$

3) $h(x) = \sqrt{\tan x}$

4) $k(x) = \sin\sqrt{x}$

Câu 2. Tìm hàm ngược của các hàm số sau

1) $y = 2x + 3$

2) $y = x^2 - 1, x < 0$

3) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

4) $y = \lg\dfrac{x}{2}$

Câu 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

1) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

2) $f(x) = \mathrm{s\,inx} + \cos x$

3) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

Câu 4. Tìm các giới hạn sau:

1) $\underset{x\to+\infty}{Lim}\dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

2) $\underset{x\to+\infty}{Lim}\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

3) $\underset{x\to 4}{Lim}\dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$

4) $\underset{x\to 7}{Lim}\dfrac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14}$

5) $\underset{x\to 1}{Lim}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

6) $\underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$

7) $\underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

8) $\underset{x\to+\infty}{Lim}\left(x - \sqrt{x^2 + x}\right)$

9) $\underset{x\to+\infty}{Lim}\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x\right)$

10) $\underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\tan^2 x}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{x^3}}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

16) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

17) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 5x$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$

Câu 5. Xác định a để các hàm số sau là liên tục trong miền xác định của chúng

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{1+x^3} : x\neq -1\\ a: \quad x=-1\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}\cos x: \quad x\le 0\\ a\left(x-1\right): x>0\end{cases}$

CHƯƠNG II. PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

2.1. Đạo hàm và vi phân hàm một biến số thực

2.1.1. Định nghĩa và tính chất

a) Định nghĩa đạo hàm.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên X. $x_0, x\in X$.

Đặt $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, $\Delta x, \Delta y$ gọi là số gia đối số và hàm số tại x_0.

Nếu $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ tồn tại thì giới hạn này gọi là *đạo hàm của hàm số* $y=f(x)$ tại x_0.

Ký hiệu: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$

Ví dụ 2.1. $f(x)=C$, với C là một hằng số.

$\forall x$, ta có: $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=0$

Do đó: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$

Ví dụ 2.2. $f(x)=\cos x$

$\forall x$, ta có: $\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$

Do đó: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-2\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} -\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = -\sin x$

Chú ý. Theo định nghĩa thì $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Nếu $\Delta x \to 0^+, \Delta x \to 0^-$ thì các giới hạn tương ứng được gọi là *đạo hàm một phía* (đạo hàm bên phải, đạo hàm bên trái) của hàm số $y = f(x)$ tại x_0.

Ký hiệu: $f'(x_0 + 0),\ f'(x_0 - 0)$

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 khi và chỉ khi tại điểm đó đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái cùng tồn tại và bằng nhau.

Ví dụ 2.3. Xét $f(x) = |x|$, tại điểm $x_0 = 0$, ta có:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Đạo hàm bên phải: $f'(+0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$

Đạo hàm bên trái: $f'(-0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$

Vậy tại điểm $x_0 = 0$ hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm.

b) Định nghĩa vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng $X \subset R$. Hàm số $f(x)$ được gọi là *hàm khả vi* tại điểm $x_0 \in X$ nếu tồn tại số thực A sao cho: $\Delta f(x_0) = A\Delta x + O(\Delta x)$, trong đó $O(\Delta x)$ là một VCB bậc cao hơn bậc của Δx. Khi đó tích $A\Delta x$ gọi là *vi phân của hàm số* $f(x)$ tại điểm x_0 và được ký hiệu:

$df(x_0) = A\Delta x$ hay $dy(x_0) = A\Delta x$

Ví dụ 2.4. Xét hàm số $f(x) = x^2$. Tại điểm x_0 bất kỳ, ta có:

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 = 2x_0\Delta x + O(\Delta x)$$

Theo định nghĩa, $f(x)$ là hàm khả vi tại điểm x_0 và $df(x_0) = 2x_0\Delta x$

c) Liên hệ vi phân và đạo hàm

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0, tức là tồn tại A sao cho $\Delta f(x_0) = A\Delta x + O(\Delta x)$

Chia 2 vế cho Δx ta được:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{O(\Delta x)}{\Delta x}$$

Vì $O(\Delta x)$ là VCB bậc cao hơn Δx nên $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{O(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ do đó $f'(x_0) = A$

Xét $y = f(x) = x$ thì $dy = 1.\Delta x$ nhưng $y = x$, do đó $\Delta x = dx$

Vậy ta có công thức tính vi phân: $dy = y'dx$

Ví dụ 2.5. $d\sin x = \cos x dx$

$$d\left(\sqrt{2 + x^2}\right) = \frac{xdx}{\sqrt{2 + x^2}}$$

Từ công thức $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + O(\Delta x)$, ta có:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x\ .$$

Công thức xấp xỉ này cho phép ta tìm giá trị gần đúng của hàm f tại $x_0+\Delta x$.

Ví dụ 2.6. Tính gần đúng $\sqrt[3]{1,02}$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x}$, chọn $x_0=1$, $\Delta x=0,02$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Nên $f(1,02)\approx f(1)+0,02.f'(1)\Rightarrow \sqrt[3]{1,02}\approx 1-\dfrac{1}{3}0,02=\dfrac{2,98}{3}$

Chú ý. Từ công thức tính vi phân ta có $\dfrac{dy}{dx}=y'$. Mặt khác ta ký hiệu đạo hàm là $\dfrac{dy}{dx}$, ký hiệu này có nghĩa đạo hàm của hàm số bằng thương của vi phân của hàm số và vi phân của đối số.

d) Tính chất

i) $f(x)$ khả vi tại x_0 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ có đạo hàm tại x_0

ii) $f(x)$ khả vi tại x_0 $\Rightarrow f(x)$ có liên tục tại x_0

iii) $f(x)$ khả vi tại x_0, đạt cực trị tại x_0 $\Rightarrow f'(x_0)=0$

Tính chất 3 chỉ là điều kiện cần để $f(x)$ đạt cực trị tại x_0, nó không là điều kiện đủ vì có những hàm số đạo hàm bằng không tại x_0, nhưng không đạt cực trị tại đó. Chẳng hạn, xét hàm số $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$, $f'(0)=0.$ Nhưng $f(x)$ không đạt cực trị tại $x=0.$

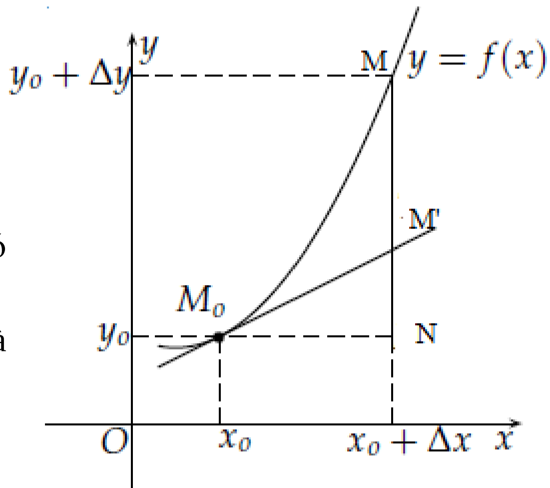
2.1.2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y=f(x)$ khả vi tại x_0 và C là đồ thị của nó.

Xét $M_0(x_0, f(x_0))\in C,\quad M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))\in C.$

Gọi φ là góc giữa đường thẳng M_0M và trục Ox .

$\tan\varphi=\dfrac{\overline{MN}}{\overline{M_0N}}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$



Xét M dần tới M_0, nghĩa là $\Delta x\to 0$.

Khi đó đường thẳng M_0M sẽ dần tới vị trí giới hạn là đường thẳng M_0M' là tiếp tuyến với C tại M_0. Gọi α là góc giữa tiếp tuyến đó với trục Ox thì $\tan\varphi\to\tan\alpha$. Do đó ta có, $\tan\alpha=f'(x_0)$. Vậy đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M_0 có hoành độ $x=x_0$.

2.1.3. Ý nghĩa cơ học

Xét một điểm M chuyển động thẳng không đều tính từ một điểm O nào đó, giả sử khoảng cách $\overrightarrow{OM}$ phụ thuộc vào thời gian t: $\overrightarrow{OM}=f(t)$. Người ta gọi tốc độ của M tại thời điểm t là: $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$

Theo định nghĩa đạo hàm thì $v=f'(t)$. Vậy đạo hàm của khoảng cách $\overrightarrow{OM}$ tại thời điểm t bằng tốc độ của chuyển động tại thời điểm đó. Người ta cũng mở rộng khái niệm tốc độ xét một hàm số $f(x)$ bất kỳ và gọi tốc độ của $f(x)$ tại x là: $v = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$.

2.14. Quy tắc tính đạo hàm và vi phân

a) Quy tắc tính

Định lý.

Nếu các hàm số $u = u(x),\ v = v(x)$ khả vi tại điểm x_0 thì các hàm số $u \pm v,\ u.v,$ $\dfrac{u}{v}\ (v \neq 0)$ cũng khả vi tại x_0 và

1. $(u \pm v)' = u' \pm v$ $\qquad d(u \pm v) = du \pm dv$
2. $(ku)' = ku'$ $\qquad d(ku) = kdu$
3. $(uv)' = u'v + v'u$ $\qquad d(uv) = vdu + udv$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}\ (v \neq 0)$ $\qquad d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}\ (v \neq 0)$

Ví dụ 2.6. Tính đạo hàm của hàm số $y = 3x^2 \ln x - x^3$

$$y' = 6x \ln x + 3x^2 \frac{1}{x} - 3x^2 = 6x \ln x + 3x - 3x^2$$

b) Đạo hàm của hàm hợp

Định lý. Nếu hàm số $u = f(x)$ khả vi tại x và hàm số $y = g(u)$ khả vi tại u Thì hàm hợp $y = g(f(x))$ khả vi tại x và $y'_x = y'_u.u'_x$

Ví dụ 2.7. $y = \cos^3 x$ là hàm hợp của hai hàm $y = u^3$ và $u = \cos x$

Suy ra $y' = (u^3)'.(\cos x)' = 3u^2.(-\sin x) = -3\cos^2 x.\sin x$

Ví dụ 2.8. $y = e^{\sin^2 x} \Rightarrow y' = e^{\sin^2 x}.2\sin x.\cos x = \sin 2x.e^{\sin^2 x}$

2.1.5. Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

1. $(C)' = 0$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a;\quad (e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a};\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
12. $(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Dùng bảng này và các quy tắc tính đạo hàm ta có thể tính đạo hàm hay vi phân của một hàm số sơ cấp bất kỳ.

Chú ý.

1. Nếu y là hàm số ẩn của x xác định từ phương trình $f(x, y) = 0$. Muốn tính đạo hàm của y theo x, ta tính đạo hàm hai vế theo x, sau đó giải y' ra đối với x.

Ví dụ 2.9. Tính đạo hàm $y'(x)$ của hàm ẩn được cho bởi phương trình: $\arctan(x+y)=x$

Lấy đạo hàm 2 vế theo biến x, ta được: $\frac{1}{1+(x+y)^2}(1+y')=1 \Rightarrow y'=(x+y)^2$

2. Nếu y là hàm được cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ thì đạo hàm của y theo x được tính theo công thức: $y'(x)=\frac{y'_t}{x'_t}$.

Ví dụ 2.10. Tính đạo hàm $y'(x)$ của hàm số $y=y(x)$ được cho bởi phương trình tham số: $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=2t-2\arctan t \end{cases}$

Ta có: $x'_t=\frac{2t}{1+t^2}$; $y'_t=2-\frac{2}{1+t^2}=\frac{2t^2}{1+t^2} \Rightarrow y'(x)=\frac{2t^2}{1+t^2}.\frac{1+t^2}{2t}=t$

3. Nếu hàm số $y=y(x)$ được cho bởi một biểu thức lũy thừa mủ dạng $y=u^v$ trong đó $u=u(x), v=v(x)$ là các hàm số đối số x và $u(x)>0$. Do cả cơ số u và lũy thừa v đều phụ thuộc x nên khi tính đạo hàm của biểu thức loại này ta không thể áp dụng trực tiếp các công thức đạo hàm của hàm số mủ và hàm lũy thừa. Để tính đạo hàm ta sử dụng phương pháp *logarit hóa* như sau:

- Lấy logarit của y (cơ số e): $\ln y=\ln u^v=v\ln u$
- Lấy đạo hàm hai vế, ta được : $\frac{y'}{y}=v'\ln u+v\frac{u'}{u}$

Từ đây suy ra $y'=y(v'\ln u+v\frac{u'}{u})$

Ví dụ 2.11. Tính đạo hàm của hàm số $y=(1+x^2)^{\sin x}$

Ta có: $\ln y=\sin x\ln(1+x^2)$. Lấy đạo hàm hai vế, ta được:

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln(1+x^2)+\sin x\frac{2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y'=(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right]$$

2.1.6. Đạo hàm và vi phân cấp cao

a) *Định nghĩa.*

Cho hàm số $y=f(x)$ khả vi trong miền $X\subseteq R$, thì đạo hàm $y'=f'(x)$ hay vi phân $dy=f'(x)dx$ cũng là một hàm số của đối số x trong miền X . Giả sử hàm số này cũng khả vi trong X , khi đó đạo hàm hay vi phân của nó gọi là đạo hàm hay vi phân cấp hai của $f(x)$.

Ký hiệu: $y'', \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), d^2y, d^2f(x)=d(d(f(x)))$

Tổng quát: Đạo hàm hay vi phân cấp n của $f(x)$ tại x là đạo hàm hay vi phân của đạo hàm hay vi phân cấp n-1 của $f(x)$ tại x.

Ký hiệu: $y^{(n)}, \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), d^ny, d^nf(x)=d(d^{n-1}(f(x)))$

Ví dụ 2.12. $y=\ln x$

Ta có: $y' = \frac{1}{x}$

$y'' = -\frac{1}{x^2}$

$y^{(3)} = \frac{1.2}{x^3}$

$y^{(4)} = -\frac{2.3}{x^4}$

....

$$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Ví dụ 2.13. $y = \sin x$

Ta có: $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$$

....

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Tương tự: $y = \cos x$ thì $y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

Ví dụ 2.14. $y = \frac{1}{1+x}$

$$y' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y^{(3)} = -\frac{2.3}{(1+x)^4}$$

....

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{1.2.3.4...n}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

2.1.7. Ứng dụng của đạo hàm

a) Khai triển hàm số

Công thức Taylor và Maclaurin

Ta đã biết, trong các hàm số thì đa thức là hàm đơn giản nhất. Đặc biệt là trong việc tính giá trị của hàm số tại một điểm. Công thức Taylor được trình bày dưới đây cho phép ta xấp xỉ một hàm đã cho bởi một đa thức miễn là các giả thiết của công thức được thỏa mãn và từ đó việc tính giá trị của hàm số đó tại một điểm có thể tính gần đúng bởi giá trị tại điểm đó của đa thức xấp xỉ.

Định lý. Nếu hàm số $y = f(x)$ có các đạo hàm đến cấp n liên tục trong đoạn $[a,b]$, có đạo hàm cấp (n+1) trong khoảng (a,b) thì với bất kì $x_0 \in (a,b)$ luôn có:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$$

Công thức này gọi là *công thức Taylor* và biểu diễn một hàm số $f(x)$ dưới dạng trên được gọi là *khai triển Taylor* của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = x_0$.

Đặc biệt $x_0 = 0$ thì công thức Taylor trở thành:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

gọi là công thức Maclaurin.

Các khai triển quan trọng.

Ta sẽ khai triển một số hàm số sơ cấp cơ bản quan trọng theo công thức Maclaurin, có rất nhiều ứng dụng trong thực tế.

1^0. Hàm số $f(x) = e^x$

Ta có: $f^{(n)}(x) = e^x$, do đó $f^{(n)}(0) = 1,\ n = 1, 2, \ldots$

Vậy $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

2^0. Hàm số $f(x) = \sin x$

Ta biết: $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

Do đó: $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 2m,\ m = 1, 2\ldots \\ (-1)^{m-1} & n = 2m - 1, m = 1, 2\ldots \end{cases}$

Vậy: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots + o(x^n)$

Tương tự, ta có:

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots + o(x^n)$

3^0. Hàm số $f(x) = \frac{1}{1 + x}$

Ta có: $f^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{(1 + x)^{n+1}}$

Do đó: $f(0) = 1, f'(0) = -1,\ f''(0) = 2!\ , \ldots,\ f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$

Vậy: $\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$

b) Quy tắc L'Hôspital (khử dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$)

Định lý . Giả sử các hàm số $u(x)$ và $v(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

1. Giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$, tức là cả hai hàm số $u(x)$ và $v(x)$ cùng có giới hạn bằng không hoặc cùng có giới hạn vô hạn.

2. Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$ (hữu hạn hoặc vô hạn)

Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$

Ví dụ 2.15. Tính giới hạn

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$$

Chú ý:

1. Có thể áp dung qui tắc L'Hôspital nhiều lần nếu $u'(x)$, $v'(x)$ lại thỏa mãn các điều kiện của qui tắc.

Ví dụ 2.1.6. Tính các giới hạn.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{3\cos 3x}=\frac{\ln 2}{3}$$

2. Có thể áp dụng qui tắc L'Hôspital để khử dạng vô định $0.\infty, \infty-\infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ bằng cách đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Ví dụ 2.16. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ (Dạng $0.\infty$)

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Ví dụ 2.17. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ (Dạng ∞^0)

Đặt $y=x^{\frac{1}{x}}$. Lấy logarit hai vế:

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln x=\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty}(\ln y)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} \qquad \text{(Dạng } \frac{\infty}{\infty}\text{)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to +\infty} y=e^0=1$

Ví dụ 2.18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{x}}$ (Dạng 0^0)

Đặt $y=\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{x} \quad \text{(Dạng } \frac{\infty}{\infty}\text{)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2x}{1+x^2}=0$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} y=e^0=1$

c) Tìm các điểm cực trị của hàm số

• *Khái niệm cực trị.*

Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trong miền $X\subseteq R$.

Ta nói rằng hàm số đạt *giá trị cực đại* (*giá trị cực tiểu*) tại điểm $x_0\in X$ nếu $f(x)\le f(x_0)$ $\left(f(x)\ge f(x_0)\right)$, với mọi điểm $x\in X$ trong lân cận nào đó của x_0 .

Điểm x_0 mà tại đó hàm số $f(x)$ nhận giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) được gọi là *điểm cực đại* (*điểm cực tiểu*) của nó. Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là *điểm cực trị* của hàm số.

• Điều kiện cần của cực trị.

Định lý . Nếu hàm số $f(x)$ đạt giá trị cực đại hoặc cực tiểu tại điểm x_0 và tại điểm đó hàm số có đạo hàm thì $f'(x_0)=0$.

• **Quy tắc thứ nhất tìm cực trị**.

Định lý . Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trong miền X và khả vi tại lân cận điểm $x_0\in X$ có thể trừ tại x_0 và nếu trong lân cận đó:

Khi $x<x_0,\ f'(x)>0$ ($f'(x)<0$)

$x>x_0,\ f'(x)<0$ ($f'(x)>0$)

thì $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0.

Ví dụ 2.19. Tìm các điểm cực trị của hàm số $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$

Ta có: $y'=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}}=\dfrac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$

$y'=0$ khi $x=2$

y' không tồn tại khi $x=0$

Xét dấu của y' theo bảng

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$

y'		+	$\|\|$	-		+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-3\sqrt[3]{4}$	↗	$+\infty$

Ta thấy: $x = 0$ là điểm cực đại của y, $y_{max} = y(0) = 0$

$x = 2$ là điểm cực tiểu của y, $y_{min} = y(2) = -3\sqrt[3]{4}$.

Chú ý. Qua ví dụ trên ta thấy $f(x)$ có thể đạt cực trị tại những điểm $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại, những điểm như vậy gọi là điểm tới hạn của hàm số. Điểm x mà $f'(x) = 0$ gọi là điểm dừng của $f(x)$.

• **Quy tắc thứ hai tìm cực trị**

Định lý . Giả sử $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n tại điểm x_0 và

$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0)$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Khi đó:

Nếu n chẵn và $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\left(f^{(n)}(x_0) > 0\right)$ thì $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0.

Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0.

Trong trường hợp n=2 ta có qui tắc sau:

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 2.20. Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$

Ta có: $y' = \dfrac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$y' = 0$ khi $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$

$$y'' = \frac{\frac{-1}{x}.x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

$y''(e) = -\dfrac{1}{e^3} < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = e$ và $y_{max} = y(e) = \dfrac{1}{e}$

d) Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ theo định lý Weierstrass thì $f(x)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong đoạn đó. GTLN,GTNN chỉ có thể đạt tại các điểm cực trị của $f(x)$ hoặc tại a hoặc b. Như vậy, để tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x)$ trên $[a,b]$, ta tìm các điểm tới hạn của $f(x)$ rồi tính giá trị của $f(x)$ tại các điểm đó và tại a, b rồi so sánh ta sẽ có GTLN, GTNN.

Ví dụ 2.21. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sqrt{x-1} - \dfrac{x}{4}$ trên đoạn $[1,10]$

Ta có: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{4}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$y(1) = -\frac{1}{4}$, $y(5) = \frac{3}{4}$, $y(10) = \frac{1}{2}$

Vậy $\max\limits_{x\in[1,10]} y = \frac{3}{4}$, $\min\limits_{x\in[1,10]} y = -\frac{1}{4}$

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng (a,b) và chỉ có duy nhất một điểm cực trị $x_0 \in (a,b)$. Khi đó nếu điểm x_0 là điểm cực đại (điểm cưc tiểu) thì $f(x_0)$ chính là GTLN (GTNN) của hàm số $f(x)$ trong khoảng (a,b).

Ví dụ 2.22. Hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ có một điểm cực trị duy nhất trong khoảng $(0,+\infty)$ là điểm cược đại $x = e$. Vậy GTLN của hàm số bằng giá trị của hàm số tại điểm $x = e$, $\max\limits_{x\in(0,+\infty)} y = y(e) = \frac{1}{e}$

2.2. Đạo hàm riêng và vi phân

2.2.1. Đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền $D \subset R^2$, $M_0(x_0,y_0) \in D$. Nếu cho $y = y_0$, hàm số một biến số $z = f(x,y_0)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng* của $f(x,y)$ đối với x tại M_0 và được ký hiệu: $f'_x(x_0,y_0)$ hay $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ hay $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$

Đặt $\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$. Biểu thức đó được gọi là *số gia riêng phần* của $f(x,y)$ theo x tại $M_0(x_0,y_0)$. Ta có: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}$

Tương tự như vậy định nghĩa đạo hàm riêng của $f(x,y)$ đối với y tại M_0, ký hiệu là $f'_y(x_0,y_0)$ hay $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ hay $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Các đạo hàm riêng của hàm số n biến số $(n \geq 3)$ được định nghĩa tương tự. Khi tính đạo hàm riêng của một hàm số theo biến số nào, chỉ việc xem như hàm số chỉ phụ thuộc biến số ấy, các biến số khác được coi như hằng số, rồi áp dụng các qui tắc tính đạo hàm của hàm số một biến số.

Ví dụ 2.23. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau:

a) $z = 5x^2y - y^2 + 7$

$z'_x = 10xy;\ \ z'_y = 5x^2 - 2y$

b) $z = e^{-\frac{x}{y}} + y\ln(1+xy)$

$z'_x = e^{-\frac{1}{y}} + \frac{y^2}{1+xy};\quad z'_y = e^{\frac{x}{y^2}} + \ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy}$

c) $z = x\arctan\frac{y}{x}$.

$$z'_x = \arctan\frac{y}{x} + x.\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \arctan\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$z'_y = x.\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

Chú ý. $\frac{\partial f}{\partial x}$ là một ký hiệu chứ không phải là một thương. ∂f và ∂x đứng riêng rẽ không có ý nghĩa gì.

2.2.2. Vi phân toàn phần

Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền $D \subseteq R^2$. Lấy các điểm $M_0(x_0,y_0) \in D$, $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$. $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ được gọi là *số gia toàn phần* của $f(x,y)$ tại M_0.

Nếu có thể biểu diễn Δf dưới dạng $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + O(\rho)$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, trong đó A, B là những số chỉ phụ thuộc x_0, y_0, thì ta nói hàm số $f(x,y)$ *khả vi* tại M_0. Còn biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là *vi phân toàn phần* của $f(x,y)$ tại M_0 và được ký hiệu dz hoặc df .

Định lý. Nếu hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền D và có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm $M_0(x_0,y_0) \in D$ thì $f(x,y)$ khả vi tại M_0 và ta có:

$$dz = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y$$

Chú ý. Cũng như đối với hàm một biến số, nếu x, y là biến số độc lập thì $\Delta x = dx,\ \Delta y = dy$, do đó $dz = f'_x dx + f'_y dy$.

Từ định nghĩa ta thấy vi phân toàn phần df chỉ khác số gia toàn phần Δf một VCB bậc cao hơn $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Do đó khi $\Delta x, \Delta y$ có trị số tuyệt đối khá bé, ta có thể xem $\Delta f \approx df$, tức là:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_x(x_0,y_0)\Delta y$$

Ví dụ 2.24. Tính gần đúng $\sqrt[3]{(1{,}02)^2 + (0{,}05)^2}$

Xét $z = \sqrt[3]{x^2+y^2}$. Ta cần tính $z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ với $x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}02,$ $y_0 = 0,\ \Delta y = 0{,}05$

$$z'_x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}}, \quad z'_y = \frac{2y}{3\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}}$$

Ta có: $z(1+0.02, 0+0.05) \approx z(1,0) + \frac{2.1}{3\sqrt[3]{1+0}}0{,}02 + \frac{2.0}{3\sqrt[3]{1+0}}0{,}05 = 1 + \frac{0{,}04}{3} \approx 1{,}01333$

2.2.3. Đạo hàm riêng của hàm hợp

Giả sử $z = f(u,v)$, với u, v là các hàm số của cùng một biến x, $u = \phi(x)$, $v = \psi(x)$. Khi đó ta có hàm hợp: $z = f[\varphi(x), \psi(x)]$.

Đạo hàm của z theo x: $z'_x = f'_u(u,v)u'_x + f'_v(u,v)v'_x$

Đạo hàm của z theo y : $z'_y = f'_u(u,v)u'_y + f'_v(u,v)v'_y$

Ví dụ 2.25. Cho $z = e^u \ln v,\ \ u = xy, v = x^2 + y^2$

$$z'_x = e^u \ln v\ .y + \frac{e^u}{v} 2x = e^{xy} y \ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2xe^{xy}}{x^2 + y^2}$$

$$z'_y = e^u \ln v\ .x + \frac{e^u}{v} 2y = e^{xy} x \ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2ye^{xy}}{x^2 + y^2}$$

2.2.4. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao.

a) Đạo hàm riêng cấp cao.

Cho hàm số hai biến số $z = f(x,y)$. Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là những đạo hàm riêng cấp một. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một nếu tồn tại được gọi là những đạo hàm riêng cấp hai. Ta có 4 đạo hàm riêng cấp hai được ký hiệu như sau:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y)$$

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai, nếu tồn tại được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba,...

Nếu hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng $f''_{xy}(x,y),\ f''_{yx}(x,y)$ tại M_0 và các đạo hàm riêng liên tục tại M_0 thì $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$ tại M_0.

Ví dụ 2.26. Tìm các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau:

a) $z = e^{x^2+y^2}$

Ta có: $z'_x = 2xe^{x^2+y^2}$, $\quad z''_{x^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2}$

$z'_x = 2ye^{x^2+y^2}$, $\quad z''_{x^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2}$

$z''_{xy} = z''_{yx} = 4xye^{x^2+y^2}$

b) $z = x^2 \ln(x + y^2)$

Ta có: $z'_x = 2x\ln\left(x + y^2\right) + \dfrac{x^2}{x + y^2}$, $\quad z'_y = \dfrac{2x^2y}{x + y^2}$

$$z''_{x^2} = 2\ln\left(x + y^2\right) + \frac{2x}{x + y^2} + \frac{x^2 + 2xy^2}{\left(x + y^2\right)^2}$$

$$z''_{xy} = \frac{4xy}{(x+y^2)^2} - \frac{2yx^2}{\left(x+y^2\right)^2}$$

$$z''_{y^2} = \frac{2x^3 - 2x^2y^2}{\left(x+y^2\right)^2};\ z''_{yx} = \frac{2yx^2 + 4xy^3}{\left(x+y^2\right)^2}$$

Ví dụ 2.27. Cho $z = x^3 \ln y$. Tính $z^{(3)}_{xy^2}$

Ta có: $z'_x = 3x^2 \ln y$; $z''_{xy} = \frac{3x^2}{y} \Rightarrow z^{(3)}_{xy^2} = -\frac{3x^2}{y^2}$

Chú ý: Ta dùng ký hiệu $z^{(8)}_{x^3y^5}$ để chỉ lấy đạo hàm theo biến x ba lần liên tiếp, sau đó lấy đạo hàm năm lần theo biến y.

b) Vi phân cấp cao.

Xét hàm số $z = f(x,y)$. Vi phân toàn phần của $dz = f'_x dx + f'_y dy$,nếu tồn tại được gọi là *vi phân toàn phần cấp 2* của z và được ký hiệu d^2z. Vậy $d^2z = d(dz) = d\left(f'_x dx + f'_y dy\right)$.

Cứ tiếp tục như vậy người ta định nghĩa vi phân cấp cao hơn:

$$d^3z = d\left(d^2z\right)$$

....

$$d^nz = d\left(d^{n-1}z\right)$$

Giả sử x, y là những biến số độc lập và các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} liên tục, khi đó: $d^2z = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2$

Người ta thường dùng ký hiệu tượng trưng: $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$, trong đó các bình phương hai lần của $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng hai lần đối với x , hai lần đối với y , $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng một lần đối với x, một lần đối với y

Tổng quát: $d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$

Ví dụ 2.28. Tìm vi phân cấp hai của hàm số $z = e^{x^2+y^2}$.

Ta có :

$z'_x = 2xe^{x^2+y^2}$, $\quad z''_{x^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2}$

$z'_y = 2ye^{x^2+y^2}$ $\quad z''_{y^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2}$

$z''_{xy} = z''_{yx} = 4xye^{x^2+y^2}$

Do đó: $d^2z = (2+4x^2)e^{x^2+y^2}dx^2 + 8xye^{x^2+y^2}dxdy + (2+4y^2)e^{x^2+y^2}dy^2$.

2.2.5. Cực trị của hàm nhiều biến

Khái niệm cực trị của hàm số n biến số được định nghĩa hoàn toàn tương tự như cực trị của hàm một biến số.

Định nghĩa. Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trên $D \subset R^2$. Ta nói rằng hàm số $f(x,y)$ đạt *cực đại (cực tiểu*) tại $M_0(x_0,y_0)$ nếu với mọi điểm $M(x,y)$ trong một lân cận nào đó của M_0 thì $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ ($f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$).

Điểm $M_0(x_0,y_0)$ mà tại đó hàm số $f(x,y)$ đạt giá trị cực đại (cực tiểu) được gọi là *điểm cực đại (điểm cực tiểu)* của nó. Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi là các *điểm cực trị* của hàm số.

a) Cực trị không có điều kiện ràng buộc (cực trị tự do)

Định lý . Nếu hàm số $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại $M_0(x_0,y_0)$ mà tại đó các đạo hàm riêng f'_x, f'_y tồn tại thì các đạo hàm riêng ấy bằng không.

Định lý trên cho thấy hàm số $f(x,y)$ chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm tới hạn.

Ký hiệu: $A = f''_{x^2}(x_0,y_0),\quad B = f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C = f''_{y^2}(x_0,y_0)$

Định lý . Giả sử $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp 2 liên tục trong một lân cận nào đó của $M_0(x_0,y_0)$. Giả sử tại M_0 ta có $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$. Khi đó tại M_0:

i) Nếu $AC - B^2 > 0$ thì $f(x,y)$ đạt cực trị tại M_0. Đó là cực tiểu nếu $A > 0$, là cực đại nếu $A < 0$.

ii) Nếu $AC - B^2 < 0$ thì $f(x,y)$ không đạt cực trị tại M_0.

iii) Nếu $AC - B^2 = 0$ thì $f(x,y)$ có thể đạt cực trị tại M_0, cũng có thể không đạt cực trị tại M_0 .

Ví dụ 2.29. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy$

Ta có: $z'_x = 3x^2 - 3y,\ z'_y = 3y^2 - 3x$

$$\begin{cases} z'_y = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = 1, y = 1 \end{array}\right.$$

Hàm số có 2 điểm dừng $M_1(0,0), M_2(1,1)$.

$z''_{x^2} = 6x,\ z''_{xy} = -3,\ z''_{y^2} = 6y$

Tại $M_1(0,0)$: $A = 0,\ B = -3, C = 0 \Rightarrow AC - B^2 = -9 < 0 \Rightarrow M_1(0,0)$ không phải là điểm cực trị.

Tại $M_2(1,1)$: $A = 6,\ B = -3, C = 6 \Rightarrow AC - B^2 = 27 > 0 \Rightarrow M_2(1,1)$ là điểm cực tiểu.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $M_2(1,1)$.

c) Cực trị có điều kiện

Người ta gọi cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ (1) trong đó các biến số x và y bị ràng buộc bởi hệ thức $\varphi(x,y) = 0$ (2) là cực trị có điều kiện.

Hệ thức (2) áp đặt sự phụ thuộc lẫn nhau giữa các biến dưới dạng hàm ẩn. Nếu từ (2) ta biểu diễn được y dưới dạng hàm hiện $y = \psi(x)$ thì bài toán cực trị điều kiện nêu trên qui về bài toán tìm cực trị tự do của hàm một biến số x: $z = f(x,\psi(x))$.

Ví dụ 2.30. Tìm cực trị của hàm số $z = 2x^2 + y^2 - 2y - 2$ với điều kiện $-x + y + 1 = 0$

Từ điều kiện $-x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1$

Thay $y = x - 1$ vào đẳng thức $z = 2x^2 + y^2 - 2y - 2$, ta có:

$z = 2x^2 + (x-1)^2 - 2(x-1) - 2 = 3x^2 - 4x + 1$

Tìm cực trị của hàm $z = 3x^2 - 4x + 1$.

x	$-\infty$		$2/3$		$+\infty$
z'		$-$	0	$+$	
z	$+\infty$	$\searrow$	$1/6$	$\nearrow$	$+\infty$

$z' = 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Vậy z đạt cực tiểu tại $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$, $z_{\min}$:

Nếu phương trình (2) xác định y là hàm ẩn của x, nói chung không giải ra đối với y khi đó ta có phương pháp sau đây để tìm cực trị của hàm số.

- *Phương pháp nhân tử Lagrange.*

Theo phương pháp Lagrange việc tìm cực trị có điều kiện của hàm (2) với điều kiện (3) đưa về tìm cực trị tự do của hàm $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x)$. Gọi là hàm Lagrange, số λ được gọi là một nhân tử Lagrange.

Điểm dừng của hàm $L(x, y, \lambda)$ được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Nếu $d^2L(x_0, y_0) > 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực tiểu.

$d^2L(x_0, y_0) < 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực đại

$d^2L(x_0, y_0) = 0$ thì (x_0, y_0) không là điểm trị.

Trong đó: $d^2L = L''_{x^2}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}dy^2$

Chú ý. $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0,\ dx^2 + dy^2 > 0$

Ví dụ 2.31. Tìm cực trị của hàm $z = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$

Lập $L(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Điểm dừng của z xác định từ hệ:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Giải ta có:

$\lambda_1 = \dfrac{5}{2},\ x_1 = \dfrac{4}{5}, y_1 = \dfrac{3}{5},\ M_1\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

$\lambda_2 = -\dfrac{5}{2},\ x_2 = -\dfrac{4}{5}, y_2 = -\dfrac{3}{5},\ M_2\left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

$L''_{x^2} = 2\lambda,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{y^2} = 2\lambda$

$d^2L(M_1) = 2\lambda_1(dx^2 + dy^2) = 5(dx^2 + dy^2) > 0$

Vậy M_1 là điểm cực tiểu có điều kiện của $z : z_{\min} = z\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right) = 1$

$d^2L(M_2) = 2\lambda_2(dx^2 + dy^2) = -5(dx^2 + dy^2) < 0$

Vậy M_2 là điểm cực đại có điều kiện của $z: z_{\min} = z\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 11$.

Bài tập.

Câu 1. Tính đạo hàm y' của các hàm số sau:

1) $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 2$

2) $y = \log_2 x + 3\log_3 x$

3) $y = 5^x + 6^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x$

4) $y = \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}\right)$

5) $y = \tan 5x$

6) $y = \ln\left(\ln\sqrt{x}\right)$

7) $y = \sin^2 x^3$

8) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

9) $y = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$

10) $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$

11) $y = e^{\sqrt{1+\ln x}}$

12) $y = \left(2 + \cos x\right)^x$

13) $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$

14) $y = x^{2x}$

Câu 2. Tính đạo hàm của các hàm ẩn $y = y(x)$ xác định từ các phương trình sau:

1) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$

2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$

3) $\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

4) $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$

5) $x^2 y + \arctan\frac{y}{x} = 0$

Câu 3. Tính đạo hàm của các hàm số cho theo tham số

1) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \ln\left(\sin\dfrac{t}{2}\right) \\ y = \ln(\sin t) \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

Câu 4. Tính vi phân dy của các hàm số sau:

1) $y = \left(1+x^2\right)\operatorname{arc}\cot x$

2) $y = \ln\left(\sin\sqrt{x}\right)$

3) $y = \sin^3 2x$

4) $y = \sqrt{x}\arctan\sqrt{x}$

5) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

6) $y = xe^{-x}$

7) $y = 2^{\tan^2 x}$

8) $y = \arccos 2^x$

9) $y = \cos^3\sqrt{x}$

10) $y = x^3 \ln x$

11) $y = \ln\left(\arctan\left(\sin x\right)\right)$

Câu 5. Tính vi phân cấp hai d^2y của các hàm số sau:

1) $y = 4^{-x^2}$

2) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$

3) $y = x\ln x$

4) $y = \cos^2 x$

Câu 6. Tính đạo hàm các cấp được chỉ ra của các hàm số tại x tương ứng

1) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$ $\quad y^{(10)}(0) = ?$

2) $y = \dfrac{e^x}{x}$ $\quad y^{(10)}(0) = ?$

Câu 7. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

1) $y = \ln(1+x)$

2) $y = \dfrac{1}{ax+b}$

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a+bx}}$

Câu 8. Tìm cực trị của các hàm số sau:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

2) $y = \left(x+1\right)e^{2x}$

3) $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$

4) $y = \sqrt{x}\ln x$

5) $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

6) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

7) $y = \ln\left(1+x^2\right) - \arctan x$

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất,nhỏ nhất của:

1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$ trên [-3,6]

2) $y = \left(x-3\right)^2 e^{|x|}$ trên [-1,4]

3) $y = 2\tan x - \tan^2 x$ trên $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Câu 10. Áp dụng vi phân để tính gần đúng các giá trị:

$\sqrt[5]{\dfrac{2-0,15}{2+0,15}}$; $\arcsin 0,51$; $\sin 29^o$; $\sqrt[3]{26,19}$; $\left(1,03\right)^5$

Câu 11. Viết công thức Maclaurin của các hàm số sau:

1) $y = \tan x$ đến $o\left(x^6\right)$

2) $y = e^{\sin x}$ đến $o\left(x^3\right)$

3) $y = \ln(1+x)$ đến $o\left(x^n\right)$

4) $y = \dfrac{1}{1+x}$ đến $o\left(x^n\right)$

5) $y = \dfrac{x^2+5}{x^2+x-12}$ đến $o\left(x^n\right)$

6) $y = \ln\dfrac{\sin x}{x}$ đến $o\left(x^7\right)$

7) $y = \ln\cos x$ đến $o\left(x^4\right)$

Câu 12. Áp dụng qui tắc L'Hôspital, tìm các giới hạn sau:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+1}{3x^2+x-1}$

10) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$

Câu 13. Tính các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau:

1) $z=x^2+y^3+3x^2y^2$

2) $z=\tan\left(x+y\right)e^{\frac{x}{y}}$

3) $z=xy\ln(xy)$

4) $z=\dfrac{x}{y}-e^x\arctan y$

5) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

6) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Câu 14. Cho $z=xy+y\cos x+x\sin y$. Tính $z^{(4)}_{xyx^2}$

Câu 15. Cho $z=e^y\ln x$. Tính $z^{(4)}_{yxy^2}$

Câu 16. Cho $z=xe^y+y^2+y\sin x$. Tính z''_{xx}

Câu 17. Tính vi phân toàn phần dz của các hàm số sau:

1) $z=x^2+4^y$

2) $z=\ln\sqrt{x-y}$

3) $z=\arctan\left(y-x\right)$

4) $z=x^2-2xy+\sin(xy)$

Câu 18. Tìm vi phân cấp hai của các hàm số sau:

1) $z = \sin^2 x + e^{y^2}$

2) $z = y \ln x$

3) $z = x^2 + x \sin^2 y$

4) $z = x^2 y^6$

5) $z = x^2 + x \cos^2 y$

Câu 19. Tìm cực trị của các hàm số sau:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

2) $z = x^3 y^2 (6 - x - y),\ x > 0, y > 0$

3) $z = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

4) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

5) $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y},\ x > 0,\ y > 0$

6) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$

7) $z = -3x^2 + 2e^y - 2y + 3$

Câu 20. Tìm cực trị có điều kiện của các hàm số sau:

1) $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ với điều kiện $x + y = 4$

2) $z = xy$ với điều kiện $2x + 3y = 5$

3) $z = e^{xy}$ với điều kiện $x + y = 1$

4) $z = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$

5) $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$

6) $z = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$

CHƯƠNG III. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ

Chương 2 ta đã xét bài toán: Cho trước một hàm số tìm đạo hàm của nó. Chương này ta xét bài toán ngược lại là cho 1 hàm số, tìm 1 hàm số có đạo hàm là hàm số ấy.

3.1.Tích phân bất định.

3.1.1. Định nghĩa.

i) *Nguyên hàm.* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $X \subset R$, nếu có một hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$ hay $dF(x) = f(x)dx, \forall x \in X$ thì $F(x)$ gọi là một nguyên hàm của $f(x)$.

Ví dụ 3.1.

Nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{1}{x}$ là $F(x) = \ln|x|$

Nguyên hàm của $f(x) = \cos x$ là $F(x) = \sin x$

Nhận xét. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X thì $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$, với C là một hằng số bất kỳ.

ii) *Tích phân bất định.*

Nếu trong một miền nào đó hàm số $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thì biểu thức $F(x) + C$, C là một hằng số tùy ý gọi là tích phân bất định của hàm số $f(x)$ trong miền đó.

Ký hiệu: $\int f(x)dx = F(x) + C$ (đọc là tích phân của $f(x)dx$)

Biểu thức $f(x)dx$ được gọi là biểu thức dưới dấu tích phân và hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số dưới dấu tích phân.

3.1.2. Bảng tích phân cơ bản

Từ bảng vi phân cơ bản ta có bảng tích phân cơ bản sau:

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -arc\cot x + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ \int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

11. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+b}\right| + C$

3.1.3.Tính chất của tích phân bất định.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ hay $d\int f(x)dx = f(x)dx$

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$ hay $\int dF(x) = F(x) + C$

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k là hằng số)

5. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$ với $u = u(x)$ bất kỳ.

Từ tính chất này suy ra: Có thể thay đối số lấy tích phân x trong bảng tích phân cơ bản bởi đối số u bất kỳ. Chẳng hạn: $\int \cos u du = \sin u + C$

Ví dụ 3.2.

a) $\int (3x^5 + 5x^3 - 2\sin x)dx = \int 3x^5 dx + \int 5x^3 dx - 2\int \sin x dx = \frac{1}{2}x^6 + \frac{5}{4}x^4 + 2\cos x + C$

b) $\int \sin(5x+3)dx = \frac{1}{5}\int \sin(5x+3)d(5x+3) = -\frac{1}{5}\cos(5x+3) + C$

c) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

d) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$

3.1.4. Các phương pháp tính tích phân

a) Phương pháp đổi biến

Xét tích phân $I = \int f(x)dx$, trong đó $f(x)$ là một hàm liên tục . Để tính tích phân này nhiều khi không áp dụng trực tiếp bảng tích phân cơ bản, mà phải biến đổi rồi mới áp dụng được. Phương pháp sau đây cho cách tính tích phân đó bằng cách thay $x = \varphi(t)$, với giả thiết hàm số $x = \varphi(t)$ đơn điệu có đạo hàm liên tục. Ta có:

$dx = \varphi'(t)dt \Rightarrow I = \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt.$

Khi phép đổi biến được lựa chọn phù hợp thì tích phân theo biến số t sẽ đơn giản hơn.

Ví dụ 3.3. Tính $I = \int \frac{dx}{2(1+\sqrt{x})}$

Đặt $x = t^2$ thì $dx = 2tdt$. Lúc đó

$$I = \int \frac{2tdt}{2(1+t)} = \int \frac{1+t-1}{1+t}dt = \int dt - \int \frac{1}{1+t}dt = t - \ln|1+t| + C$$

Vậy $I = \sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}| + C$

Ví dụ 3.4. Tính $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx \quad (a > 0)$

Đặt $x = a\sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow dx = a\cos t$

Ta có: $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = a\cos t$

Lúc đó:

$$I = \int a\cos t.a\cos t dt = a^2\int \cos^2 t dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C$$

Từ $x = a\sin t \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{t}; \quad \cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

Vậy $I = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + C$

Chú ý. Nếu biểu thức $f(x)dx$ dưới dấu tích phân có thể biểu diễn dưới dạng $f(x)dx = g[\varphi(x)]d\varphi(x)$ thì ta có thể đặt $t=\varphi(x)$ để chuyển sang tích phân của biểu thức $g(t)dt$ nếu tích phân đó dễ hơn.

Ví dụ 3.5. Tính $I=\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx$

$$I=\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx=\int \frac{x^2\left(1+x^3-1\right)}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx$$

Đặt $t=1+x^3 \Rightarrow dt=3x^2dx$

Suy ra:

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{(t-1)dt}{\sqrt[3]{t}}=\frac{1}{3}\int\left(\sqrt[3]{t^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)dt=\frac{1}{3}\int\left(t^{\frac{2}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\frac{2}{3}+1}t^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}t^{\frac{2}{3}}\right)+C=\frac{1}{5}t^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}t^{\frac{2}{3}}+C$$

Vậy: $I=\frac{1}{5}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}+C$

b) Phương pháp tích phân từng phần

Nếu có các hàm số khả vi $u=u(x), v=v(x)$ sao cho $f(x)dx=udv$ thì ta có công thức:

$\int f(x)dx=\int udv=uv-\int vdu$ (*) gọi là công thức tích phân từng phần.

Để áp dụng công thức (*) tính được $\int f(x)dx$ ta phải chọn u,v sao cho $\int vdu$ tính dễ dàng hơn $\int udv$. Mặt khác ta cũng có thể áp dụng công thức nhiều lần để tính $\int f(x)dx$.

Ví dụ 3.6. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int xe^{-2x}dx$

Đặt $u=x,\ dv=e^{-2x}dx$. Suy ra $du=dx,\ v=-\frac{1}{2}e^{-2x}$

Do đó: $I=\int xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$

b) $I=\int \arctan x dx$

Đặt $u=\arctan x, dv=dx \Rightarrow du=\frac{1}{1+x^2}, v=x$

Do đó: $I=\int \arctan x dx = x\arctan x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$

c) Tính $I=\int x^3\ln 2x dx$

Đặt $u=\ln 2x \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$

$dv=x^3dx \Rightarrow v=\frac{1}{4}x^4$

$I=\int x^3\ln 2xdx=\frac{1}{4}x^4\ln 2x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4\ln 2x-\frac{1}{16}x^4+C$

d) $I=\int e^{ax}\sin bxdx$

Đặt $u = \sin bx \quad \Rightarrow du = b\cos bx dx$

$$dv = e^{ax}dx \quad \Rightarrow v = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$I = \int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx \ \ (1)$$

Tiếp tục sử dụng tích phân từng phần đối với tích phân ở vế phải.

Đặt $u = \cos bx \quad \Rightarrow du = -b\sin bx dx$t

$$dv = e^{ax}dx \quad \Rightarrow v = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx$$

Thay vào (1) , ta được:

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I\right)$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right) = \frac{e^{ax}}{a}\left(\sin bx - \frac{b}{a}\cos bx\right) \Rightarrow I = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

Nhận xét.

1. Các tích phân $\int x^n e^{kx}dx, \int x^n \sin kx dx, \int x^n \cos kx dx$ với $n \in N$, ta có thể tính được bằng phương pháp tích phân từng phần với $u = x^n$ và dv là phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân.

2. Tích phân dạng $\int x^\alpha \ln^n x dx \ (\alpha \neq -1, n \in N^*)$ có thể tính được bằng phương pháp tích phân từng phần với $u = \ln^n x, dv = x^\alpha dx$.

3. Tích phân $\int x^n \arctan kx dx$ với $n \in N$ có thể tính được bằng phương pháp tích phân từng phần với $u = \arctan kx, dv = x^n dx$.

3.1.5. Tích phân các hàm số hữu tỉ.

a) Tích phân các hàm hữu tỉ đơn giản

Hàm hữu tỉ đơn giản hay phân số hữu tỉ đơn giản là các hàm hữu tỉ có một trong 4 dạng sau đây:

1. $\dfrac{A}{x-a}$

2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$

3. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$

4. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$

trong đó $p^2 - 4q < 0, k \geq 2, k \in N$

Bây giờ lần lượt ta tính tích phân của các hàm hữu tỉ đơn giản này.

1. $I = \int \dfrac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a+C|$

2. $I = \int \dfrac{A}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^k d(x-a) = \dfrac{A}{1-k}.\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$

3. Phân tích $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$

Theo giả thiết $q - \frac{p^2}{4} > 0$ nên đặt được $q - \frac{p^2}{4} = a^2$.

Đặt $x + \frac{p}{2} = t$ thì $dx = dt$. Khi đó:

$$I = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2+a^2}dt = M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N - M\frac{P}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \left(N - M\frac{P}{2}\right)\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

4. Tương tự

$$I = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + \left(N - M\frac{P}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$

$$= \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \left(N - M\frac{P}{2}\right).I_k$$

Với $I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$

Đặt $u = \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^k}$, $dv = dx$

Suy ra: $du = \frac{-2ktdt}{\left(t^2+a^2\right)^{k+1}}$, $v = x$

$$I_k = \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^k} + \int \frac{2kt^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k+1}} = \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^k} + 2k\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} - 2ka^2\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k+1}}$$

$$I_k = \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}$$

Vậy $I_{k+1} = \frac{t}{2ka^2\left(t^2+a^2\right)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}I_k$ (*)

Ta biết: $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{t}{t^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{t}{a} + C$$

Có I_2 ta tính được I_3

(*) gọi là công thức truy hồi, biết I_k sẽ tính được I_{k+1}.

b) Tích phân các hàm hữu tỉ bất kỳ.

Dạng tổng quát của một hàm hữu tỉ là $y = f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, trong đó $P_n(x), Q_m(x)$ là những đa thức bậc n,m và không có nghiệm chung.

Nếu $n < m$ thì hàm hữu tỉ gọi là hàm hữu tỉ thực sự.

Nếu $n > m$ thì hàm hữu tỉ gọi là hàm hữu tỉ không thực sự.

Một hàm hữu tỉ không thực sự có thể phân tích thành tổng của một đa thức và một hàm hữu tỉ thực sự bằng cách chia tử số cho mẫu số. Ta chỉ xét các hàm hữu tỉ thực sự .

Nhận xét. Một hàm hữu tỉ thực sự luôn phân tích được thành tổng của những hàm hữu tỉ đơn giản đã xét ở trên như sau:

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{B_1x + C_1}{\left(x^2 + px + q\right)^{\beta}} + \frac{B_2x + C_2}{\left(x^2 + px + q\right)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_\beta x + C_\beta}{x^2 + px + q}$$

trong đó $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, C_2, \dots$ là các hằng số gọi là các hệ số bất định được xét như sau:

Quy đồng mẫu số 2 vế, rồi bỏ mẫu số đi ta được 2 đa thức ở 2 vế đồng nhất nhau. Đồng nhất hệ số của cùng lũy thừa của x ở 2 vế ta được một hệ phương trình để xác định $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, C_2, \dots$

Ví dụ 3.7. Tính $I = \displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+4x-5}dx$

Ta có: $\dfrac{x^3+1}{x^2+4x-5} = x - 4 + \dfrac{21x-19}{x^2+4x-5} = x - 4 + \dfrac{21x-19}{(x-1)(x+5)}$

$$\frac{21x-19}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}$$

hay $21x - 19 = (A+B)x + 5A - B$

Suy ra $\begin{cases} A + B = 21 \\ 5A - B = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{62}{3} \end{cases}$

Vậy $I = \displaystyle\int \left(x - 4 + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{62}{3(x+5)} \right)dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{62}{3}\ln|x+5| + C$

Ví dụ 3.8. Tính $I = \displaystyle\int \frac{x^2+x+8}{x\left(x^2+4\right)}dx$

Ta có: $\dfrac{x^2+x+8}{x\left(x^2+4\right)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4}$

Hay $Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx = x^2 + x + 8$

Suy ra $\begin{cases} A + B = 1 \\ C = 1 \\ 4A = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$

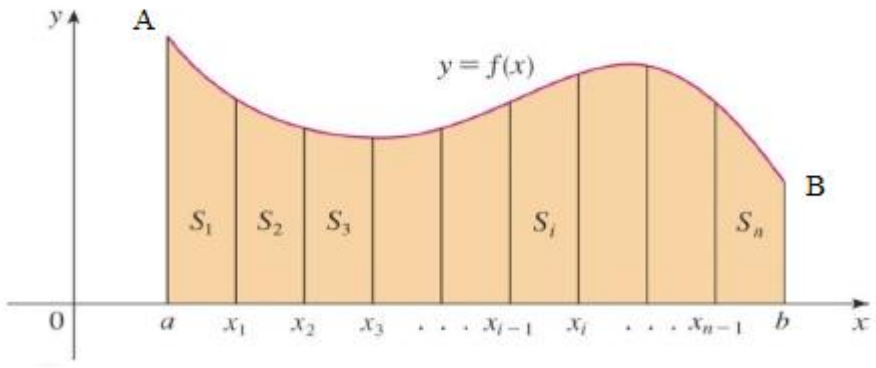
Do đó: $I = \displaystyle\int \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+4} \right)dx = 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$

3.2. Tích phân xác định

3.2.1. Bài toán dẫn đến khái niệm tích phân xác định

c) Bài toán tính diện tích hình thang cong

Xét hình giới hạn bởi đường $y = f(x)$ với $f(x) > 0$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$, ta gọi hình như thế là hình thang cong.



Chia đoạn $[a,b]$ thành n phần bất kỳ bởi các điểm:

$a = x_0 < x_2 < x_3 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b$.

Và đặt $\Delta x_1 = x_1 - x_0, ..., \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ \ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

Từ các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ ta dựng các đường thẳng song song với trục Oy. Chúng chia hình thang cong $AabB$ ra thành n hình thang cong nhỏ có đáy là $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. Trong mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2...n)$ lấy 1 điểm ξ_i tùy ý. Khi đó diện tích hình thang cong đáy Δx_i gần bằng diện tích hình chữ nhật cũng có đáy Δx_i và chiều cao $f(\xi_i)$. Như vậy, diện tích S của hình thang cong $AabB$ được tính xấp xỉ theo công thức:

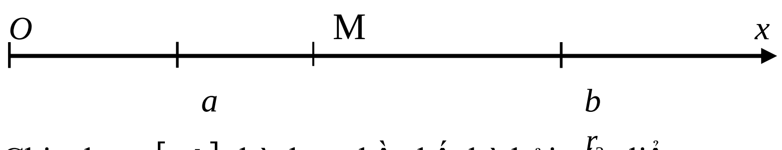
$$S \approx S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Ta thấy diện tích gần đúng S_n càng gần S nếu n càng lớn sao cho mọi độ dài Δx_i càng nhỏ. Ta qui ước khi $n \to \infty$ thì mọi $\Delta x_i \to 0$. Nếu đặt $\lambda = \max \Delta x_i$ thì $\lambda \to 0$.

Diện tích hình thang cong $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

d) Bài toán tính công của lực biến thiên

Xét một vật chuyển động thẳng từ a đến b dưới tác dụng của một lực có phương là phương của chuyển động, và độ lớn F của lực phụ thuộc vào khoảng cách S của vật tính từ 1 điểm O nào đó : $F = F(s)$. Ta sẽ tính công của lực biến thiên đó.



Chia đoạn $[a,b]$ thành n phần bất kỳ bởi các điểm:

$a = s_0 < s_1 < s_2 < ... < s_i < s_{i+1} < ... < s_n = b$

Và đặt $\Delta s_1 = s_1 - s_0, ..., \Delta s_i = s_i - s_{i-1}, \ \ \Delta s_n = s_n - s_{n-1}$

Trong mỗi đoạn $[S_i, S_{i+1}]$ $(i = 1,2...n)$ lấy 1 điểm ξ_i tùy ý và trong đoạn đó coi lực là không đổi và bằng $F(\xi_i)$, lúc đó công của lực $F(\xi_i)\Delta x_i$.

Công: $A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$

Tương tự bài toán tính diện tích hình thang cong, ta định nghĩa: $A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$ (2)

Trong toán học, giới hạn (1),(2) được gọi là tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$.

3.2.2. Định nghĩa tích phân xác định

Cho hàm số $f(x)$ xác định và bị chặn trên đoạn $[a,b]$. Chia đoạn $[a,b]$ thành n phần bất kỳ bởi các điểm chia: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b$

Và đặt $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{1,n}$

Trong mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{1,n}$ lấy 1 điểm ξ_i tùy ý. Lập tổng: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Đặt $\lambda = \max \Delta x_i$, $\lambda \to 0$ khi $n \to \infty$

Định nghĩa. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $I = \lim_{n\to\infty} I_n$ và giới hạn đó không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a,b]$, cách chọn các điểm ξ_i thì ta gọi I là *tích phân xác định* của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$.

Ký hiệu: $I = \int_a^b f(x)dx$, a là cận dưới, b là cận trên.

$\int$ gọi là *dấu tích phân*, $f(x)$ và $f(x)\,dx$ gọi là *hàm số và biểu thức dưới dấu tích phân*. x là *đối số (biến số)* lấy tích phân. Nếu $f(x)$ có tích phân trên đoạn $[a,b]$ thì hàm số $f(x)$ gọi là *khả tích* trên $[a,b]$.

3.2.3. Ý nghĩa của tích phân xác định

a) Ý nghĩa hình học.

Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đường $y = f(x), f(x) > 0$, trục Ox và các đường thẳng $x = a, x = b$ là: $S = \int_a^b f(x)dx$.

b) Ý nghĩa cơ học

Công A của lực biến thiên $F(s)$ làm một vật chuyển động thẳng từ $s = a$ đến $s = b$ là : $A = \int_a^b F(s)ds$

3.2.4. Tích phân với cận bất kỳ

Ta đã định nghĩa $\int_a^b f(x)dx$ với $a < b$. Trường hợp $a = b$ và $a > b$, khái niệm tích phân được hiểu theo qui ước sau đây:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (a > b)$

3.2.5. Điều kiện khả tích

Định lý. Một hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a,b]$ thì khả tích trên đoạn đó nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

i) $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$.

ii) $f(x)$ đơn điệu và bị chặn trên $[a,b]$

iii) $f(x)$ bị chặn và chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên $[a,b]$.

3.3.6. Các tính chất cơ bản của tích phân xác định.

i) Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì tổng $f(x) \pm g(x)$ cũng khả tích trên đoạn đó và: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

ii) Nếu $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì $kf(x)$ cũng khả tích trên đoạn đó và:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (k = \cos t)$$

iii) Nếu $f(x)$ khả tích trên đoạn chứa cả 3 điểm a,b,c thì:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

iv) Nếu $f(x)$ khả tích và $f(x) \geq 0$ trên đoạn $[a,b]$ ($a < b$) thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

v) Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ khả tích và $f(x) \geq g(x)$ trên đoạn $[a,b]$($a < b$) thì

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

vi) Nếu $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$ ($a < b$) thì $|f(x)|$ cũng khả tích trên đoạn đó và $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

3.3.7. Liên hệ giữa tích phân xác đinh và nguyên hàm

Công thức Newtơn – Leibnitz:

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì ta có công thức: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a,b]$.

Ví dụ 3.9. Tính $I = \int_0^\pi x\cos x dx$.

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = x, dv = \cos x dx$, ta có:
$F(x) = x\sin x + \cos x$

Sử dụng công thức Newtơn – Leibnitz, ta được: $I = F(\pi) - F(0) = -1 - 1 = -2$

Tương tự như tích phân bất định ta có hai phương pháp cơ bản để tính tích phân xác định, đó là phương pháp đổi biến và phương pháp tích phân từng phần.

3.3.7. Các phương pháp tính tích phân xác định

a) Phương pháp đổi biến

Giả sử ta tính $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$.

Đặt $x=\varphi(t)$ nếu $x=\varphi(t)$ thỏa mãn các điều kiện:

i) $\varphi(t)$ có đạo hàm $\varphi'(t)$ liên tục trên $[\alpha,\beta]$.

ii) Khi $t\in[\alpha,\beta]$ thì $x\in[a,b]$

iii) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$

thì ta có công thức: $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Ví dụ 3.10. Tính $I=\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

Đặt $x=2\sin t$; có $\sqrt{4-x^2}=2\cos t,-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

Ta có: $2\sin t=0\Rightarrow t=0;\ 2\sin t=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}; dt\ dx=2\cos t$

Suy ra: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos t.2\cos t dt=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[4\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$

Chú ý: Nếu tích phân có dạng $\int\limits_a^b f[\psi(x)]\psi'(x)dx$ thì có thể đặt $t=\psi(x)$ trong đó $\psi(x)$ liên tục, đơn điệu và có $\psi'(x)\ne 0$.

Ví dụ 3.11. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx$

Khi $x=0\Rightarrow t=1;\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$

$I=\int\limits_1^0\frac{-dt}{1+t^2}=\int\limits_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$

b) Phương pháp tích phân từng phần

Tương tự như tích phân bất định ta có phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân xác định theo công thức: $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu$

Phương pháp áp dụng công thức này hoàn toàn tương tự như đối với tích phân bất định.

Ví dụ 3.12. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x^2\arctan x dx$

Đặt $u=\arctan x\Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2}$

$dv=x^2dx\ \Rightarrow v=\frac{x^3}{3}$

Suy ra

$$I=\int_0^1 x^2\arctan x\,dx=\frac{x^3}{3}\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^3}{3}\arctan x\Big|_0^1-\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right)\right)\Big|_0^1=\frac{\pi+2(\ln 2-1)}{12}$$

3.2.9.Ứng dụng của tích phân xác định

a) Tính diện tích hình phẳng

Theo ý nghĩa hình học của tích phân xác định, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi $y=f(x)$, với $f(x)>0$, trục Ox và 2 đường $x=a,\ x=b$ là:

$$S=\int_a^b f(x)dx \text{ (nếu tích phân tồn tại)}$$

Nếu $f(x)<0$, thì diện tích $S=-\int_a^b f(x)dx$.

Tóm lại $S=\int_a^b |f(x)|dx$

Ví dụ 3.13. Tìm diện tích S giới hạn bởi đường $y=6x-3x^2$, trục Ox và đường $x=3$.

Ta có: $S=S_1+S_2=\int_0^2\left(6x-3x^2\right)dx-\int_2^3\left(6x-x^2\right)dx$

$$=\left(3x^2-x^3\right)\Big|_0^2-\left(3x^2-x^3\right)\Big|_2^3=8$$

Nếu đường cong cho theo phương trình tham số $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$. Trong đó $\alpha\le t\le\beta$ ứng với $a\le x\le b$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đường cong, trục Ox và 2 đường $x=a,\ x=b$ là:

$$S=\int_a^b |f(x)|dx=\int_\alpha^\beta|\psi(t)\varphi'(t)|dt \text{ (nếu tích phân tồn tại)}$$

Ví dụ 3.14. Tính diện tích S giới hạn bởi đường elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Đưa về tham số ta có:

$x=a\cos t,$

$y=b\sin t$

Khi $-a\le x\le a$ thì $0\le t\le\pi$, do đó:

$$S=2\int_0^\pi|b\sin t(-a\sin t)|dt=2ab\int_0^\pi|\sin^2 t|dt=2ab\int_0^\pi\frac{1-\cos 2t}{2}dt=2ab\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^\pi=\pi ab$$

b)Tính độ dài cung đường cong

Độ dài s của cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường cong $y=f(x)$ với $a\le x\le b$ là:

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Nếu đường cong cho theo phương trình tham số $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$. Trong đó $\alpha\le t\le\beta$ ứng với $a\le x\le b$ và $\varphi(t),\psi(t)$ có $\varphi'(t),\psi'(t)$ liên tục trên $[\alpha,\beta]$ thì:

$$s = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

Ví dụ 3.15. Tính độ dài của đườn cycloide:

$x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t);\ 0 \le t \le 2\pi$

$$s = \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a$$

c) Tính thể tích vật tròn xoay

Thể tích vật tròn xoay do hình giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$ quay xung quanh trục Ox tạo nên, với $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ là:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Ví dụ 3.16. Tính thể tích V của vật tròn xoay do hình giới hạn bởi $x = 0, x = \pi, y = 0, y = \sin x$ quay quanh Ox tạo nên.

Ta có: $V = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \dfrac{\pi}{2}\left(x - \dfrac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \dfrac{\pi^2}{2}$

d) Tính công của lực

Ví dụ 3.17.

Tính công cần thiết để mang hết nước từ một hình trụ bán kính R, chiều cao h ra khỏi ống đó (từ miệng ống ra ngoài).

Lấy trục Ox là trục của hình trụ, điểm O ở đáy trên của hình trụ và Ox hướng xuống dưới.

Xét một yếu tố ΔV của nước gồm giữa hai mặt phẳng

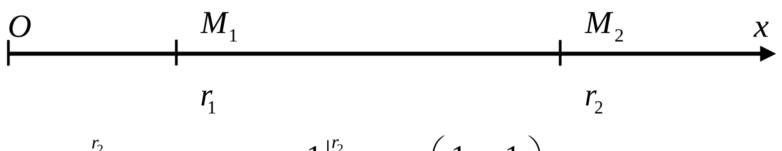
$X = x, X = x + dx$

Trọng lượng của yếu tố này là: $\pi R^2 dx.1$ và công cần thiết để mang yếu tố này ra khỏi ống trụ là: $\pi R^2 dx..x$. Do đó, công cần thiết để mang hết nước ra khỏi ống là:

$$A = \pi R^2\int_0^h xdx = \frac{\pi R^2 h^2}{2}$$

Ví dụ 3.18. Lực đẩy giữa hai điện tích cùng dấu e_1 và e_2 đặt cách nhau một khoảng r được cho bởi công thức: $F = \dfrac{e_1 e_2}{r^2}$.

Giả sử điện tích e_1 được đặt cố định ở gốc tọa độ O, hãy tính công của lực đẩy F sản ra do điện tích e_2 di chuyển từ điểm M_1 có hoành độ r_1 đến điểm M_2 có hoành độ r_2 trên trục hoành Ox.

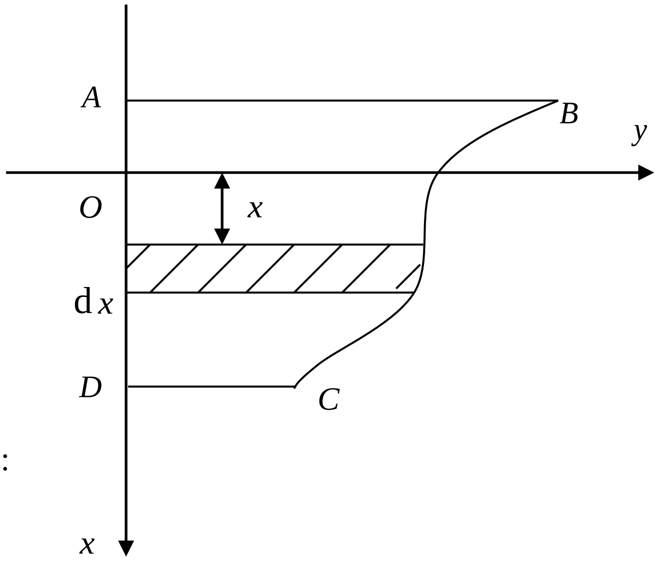


Ta có: $A = \displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{e_1.e_2}{x^2}dx = -e_1e_2.\frac{1}{x}\Big|_{r_1}^{r_2} = e_1e_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

e) Tính áp lực của chất lỏng

Xét bài toán:

Tính áp lực của nước lên một đập ABCD như hình vẽ với đường cong BC có phương trình là $y = f(x)$.



Lấy trục Oy trên mặt thoáng của nước, trục Ox là đường thẳng AD hướng xuống dưới. Xét một lớp mỏng dx của nước, cách trục Oy một đoạn x. Theo định luật pascal: Áp suất ở độ sâu x là $\omega.x$, ω là trọng lượng của một đơn vị thể tích nước. Một cách gần đúng ta coi lớp mỏng trên có diện tích là $y.dx$ thì áp lực của lớp đó lên đập là: $\omega xydx$. Do đó áp lực của nước trên đập là:

$P = \omega\int_o^h xydx$, h là độ sâu của nước.

Ví dụ 3.19. Xét đập có hình bán nguyệt: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \geq 0$, thì do tính đối xứng ta có:

$$P = 2\omega\int_o^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = -\left(R^2 - x^2\right)^{3/2}\Big|_0^R = \frac{2\omega}{3}R^3$$

3.2.10. Tích phân suy rộng

a) Tích phân có cận vô hạn

Giả sử $f(x)$ xác định trên nửa khoảng $[a,+\infty)$ và khả tích trong mọi đoạn hữu hạn $[a,b]$. Ta gọi $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ là *tích phân suy rộng* của $f(x)$ trên $[a,+\infty)$.

Ký hiệu: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ (1)

Nếu giới hạn (1) tồn tại và hữu hạn thì tích phân gọi là *hội tụ*, ngược lại gọi là *phân kỳ*.

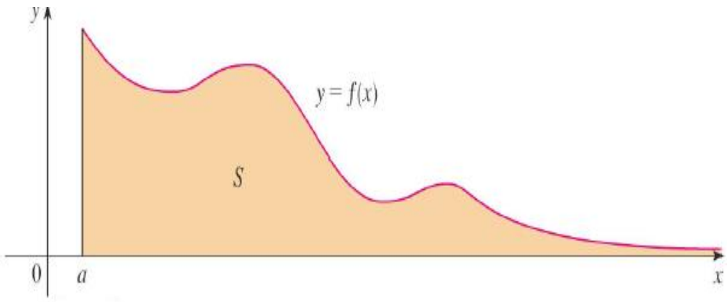
Tương tự ta định nghĩa:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (a \in R)$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nếu hai tích phân ở vế phải hội tụ.

Về hình học,trong trường hợp $f(x) > 0$, tích phân của hàm số $f(x)$ trên khoảng $[a,+\infty)$ là diện tích hình thang cong đáy vô hạn.



Ví dụ 3.20. Tính các tích phân suy rộng:

a) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(\arctan x\Big|_0^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\arctan b=\frac{\pi}{2}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$

c) $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_a^0=\frac{\pi}{2}$

Ví dụ 3.21. Xét sự hội tụ của tích phân $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha>0,\ \alpha\neq 1$

$I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$

Nếu $\alpha>1$ thì $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$

Nếu $\alpha<1$ thì $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=\infty$

Nếu $\alpha=1$ thì $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln b=\infty$

Vậy tích phân suy rộng $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha>0,$ hội tụ khi $\alpha>1$ và phân kỳ khi $\alpha\le 1$

b) Tích phân của hàm không bị chặn

Các hàm số không bị chặn trên $[a,b]$ không khả tích, tức là tích phân xác định trên đoạn đó không tồn tại theo nghĩa thông thường. Ta sẽ mở rộng khái niệm tích phân cho trường hợp này.

Định nghĩa. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b)$, $\lim_{x\to b^-}f(x)=\infty,$ $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a,b']$ với $b'<b$. Khi đó ta định nghĩa tích phân $\int_a^b f(x)dx=\lim_{b'\to b}\int_a^{b'}f(x)dx$

Nếu giới hạn bên vế phải tồn tại và hữu hạn thì ta nói tích phân hội tụ, ngược lại gọi là phân kỳ.

Tương tự, ta định nghĩa cho trường hợp hàm $f(x)$ không bị chặn tại a:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{a'\to a^+}\int_{a'}^b f(x)dx$$

Tổng quát: Nếu $f(x)$ không bị chặn tại $c, a<c<b$ thì :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ví dụ 3.22.

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underset{b\to 1^-}{Lim}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underset{b\to 1^{-1}}{Lim}\arcsin b = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ (Hàm số không bị chặn tại $x=1$)

b) $\int_0^1 \ln x dx = \underset{a\to 0^+}{Lim}\int_a^1 \ln x dx = \underset{a\to 0^+}{Lim}\left(x\ln x - x\right|_a^1 = \underset{a\to 0^-}{Lim}\left(-1 - a\ln a - a\right) = -1$

c) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \underset{a\to 1^+}{Lim}\int_a^2 \frac{dx}{x\ln x} = \underset{a\to 1^+}{Lim}\left(\ln\left(\ln x\right)\right|_a^2 = \underset{a\to 1^+}{Lim}\left(\ln\left(\ln 2\right) - \ln\left(\ln a\right)\right) = \infty$

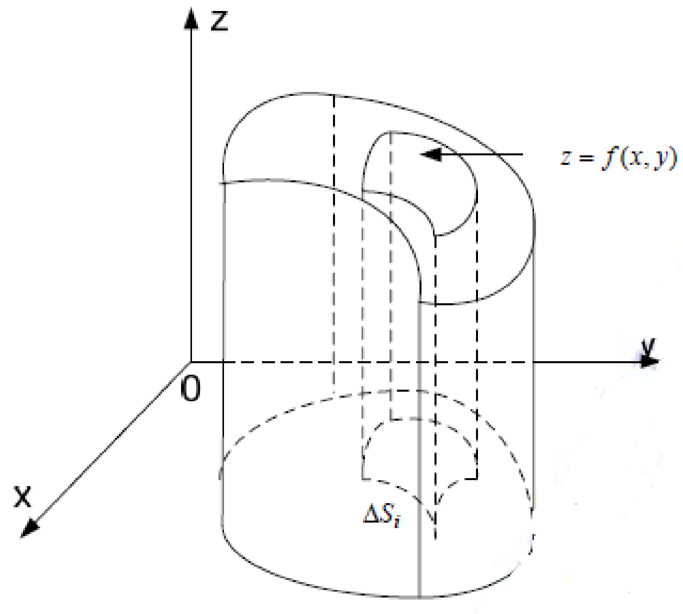
3.3. Tích phân bội hai

3.3.1. Khái niệm tích phân bội hai

Khái niệm tích phân bội của hàm nhiều biến được định nghĩa tương tự như tích phân xác định của hàm một biến.

a) *Bài toán thể tích của vật thể hình trụ* (Bài toán dẫn đến khái niệm tích phân bội 2)

Giả sử $z = f(x,y)$ là hàm số xác định, liên tục, không âm trong một miền D đóng bị chặn, có biên L trong mặt phẳng Oxy. Hãy tính thể tích của vật thể giới hạn bởi mặt phẳng Oxy, mặt $z = f(x,y)$, đường sinh song song Oz.



Chia miền D một cách tùy ý thành n mảnh nhỏ, ký hiệu ΔS_i. Lấy mỗi mảnh nhỏ ấy làm đáy, dựng vật thể hình trụ mà mặt xung quanh có đường sinh song song với Oz và về phía trên giới hạn bởi mặt $z = f(x,y)$. Như vậy thể tích hình trụ đang xét được chia thành n vật thể hình trụ nhỏ. Trong mỗi mảnh ΔS_i lấy điểm tùy ý $M_i\left(x_i, y_i\right)$. Tích $f\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i$ (trong đó ΔS_i là diện tích miền ΔS_i) bằng thể tích hình trụ thẳng có đáy ΔS_i và chiều cao $f\left(x_i, y_i\right)$, nó khác rất ít thể tích ΔV_i của vật thể hình trụ nhỏ thứ i nếu mảnh ΔS_i có đường kính khá nhỏ, vì hàm số $z = f(x,y)$ liên tục. Vậy có thể xem thể tích V của vật thể hình trụ xấp xỉ bằng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$. Phép xấp xỉ này càng chính xác nếu n càng lớn và các ΔS_i có đường kính càng nhỏ. Do đó thể tích V của vật thể hình trụ đang xét được định nghĩa bằng giới hạn, nếu có, của tổng trên khi $n \to \infty$ sao cho đường kính lớn nhất trong các đường kính d_i của các mảnh ΔS_i dần tới không, giới hạn ấy không phụ thuộc vào cách chia miền D, cũng như cách chọn điểm M_i.

b) *Định nghĩa.*

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền $D \subset R^2$. Chia miền D một cách tùy ý thành n miền nhỏ, ký hiệu ΔS_i. Trong mỗi miền ΔS_i lấy điểm tùy ý $M(x_i, y_i)$. Tổng $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ (trong đó ΔS_i là diện tích miền ΔS_i) được gọi là *tổng tích phân* của hàm số $z = f(x, y)$ trong miền D.

Gọi $\lambda = \max d(\Delta s_i)$, $d(\Delta s_i)$ là đường kính miền ΔS_i. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\lambda \to 0$ mà S_n dần tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách lấy điểm M_i trong mỗi mảnh Δs_i, thì giới hạn ấy được gọi là tích phân bội 2 của hàm số $f(x, y)$ trong miền D và được ký hiệu là: $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$

D được gọi là miền lấy tích phân, $f(x, y)$ được gọi là hàm dưới dấu tích phân.

- Nếu hàm số $f(x, y)$ có tích phân bội 2 trên D thì hàm $f(x, y)$ được gọi là *khả tích* trên D. Người ta chứng minh được rằng nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền đóng D thì nó khả tích trên miền ấy.
- Nếu $f(x, y)$ liên tục, không âm $\forall (x, y) \in D$ thì thể tích hình trụ xét ở trên
$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$
- Nếu $f(x, y) = 1, \forall (x, y) \in D$ thì diện tích S của miền D: $S = \iint\limits_D dxdy$

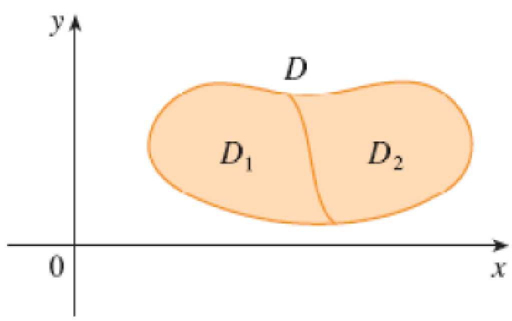
3.3.2. Tính chất

Tính chất tích phân bội 2 có những tính chất tương tự như tích phân xác định sau đây, với giả thiết rằng các tích phân trong các tính chất trên đều tồn tại.

i) $\iint\limits_D [f(x, y) + g(x, y)]dxdy = \iint\limits_D f(x, y)dxdy + \iint\limits_D g(x, y)dxdy$

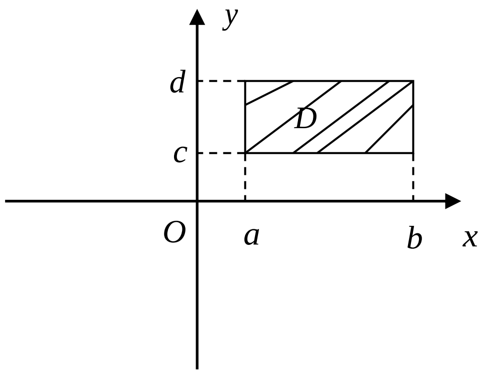
ii) $\iint\limits_D kf(x, y)dxdy = k\iint\limits_D f(x, y)dxdy,$ k là hằng số.

iii) Nếu miền D chia thành 2 miền D_1, D_2 $(D_1 \cap D_2 = \phi)$ thì
$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy$$



iv) Nếu $f(x, y) \le g(x, y), \forall (x, y) \in D$ thì $\iint\limits_D f(x, y)dxdy \le \iint\limits_D g(x, y)dxdy$

3.3.3. Các cách tính tích bội 2 .



a) Miền D là hình chữ nhật $D=[a,b]\times[c,d]$

Nếu $f(x,y)$ liên tục trên $D=[a,b]\times[c,d]$ thì

$$I=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

Ví dụ 3.23. Tính các tích phân

a) $I=\iint_D(2x+y)dxdy,\ D=[0,1]\times[1,2]$

Vì $z=2x+y$ liên tục trên D, nên: $I=\iint_D(2x+y)dxdy=\int_1^2 dy\int_0^1(2x+y)dx$

Nhưng $\int_0^1(2x+y)dx=\left(x^2+xy\right)\Big|_0^1=1+y$

Do đó: $I=\int_1^2(1+y)dy=\left(y+\dfrac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2=\dfrac{5}{2}$

b) $\iint_D x^2ydxdy,\ D=[0,1]\times[0,1]$

Vì $z=x^2y$ liên tục trên D, nên: $\iint_D x^2ydxdy=\int_0^1\left(\int_0^1 x^2ydx\right)dy$

Nhưng $\int_0^1 x^2ydx=y\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1=\dfrac{y}{3}$. Do đó: $I=\int_0^1\dfrac{y}{3}dy=\dfrac{y^2}{6}\Big|_0^1=\dfrac{1}{6}$

c) $I=\iint_D\dfrac{dxdy}{(x+y)^2},\qquad D=[1,2]\times[1,2]$

Vì $z=\dfrac{1}{(x+y)^2}$ liên tục trên D, nên:

$$I=\iint_D\frac{dxdy}{(x+y)^2}=\int_1^2\left(\int_1^2\frac{dy}{(x+y)^2}\right)dx$$

Nhưng $\displaystyle\int_1^2\frac{dy}{(x+y)^2}=\left(-\frac{1}{x+y}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x+2}$

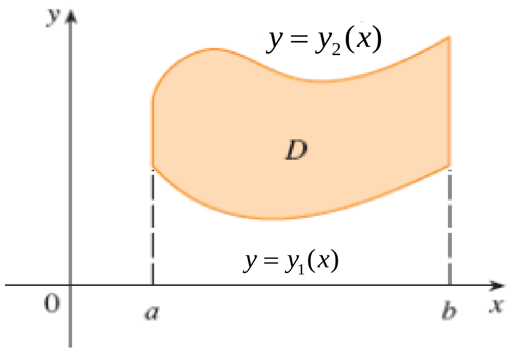
Do đó: $\displaystyle I=\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\left(\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_1^2=2\ln 3-3\ln 2=\ln\frac{9}{8}$

Chú ý. Nếu $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$, ta có: $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy$

b) Với D **là hình thang cong**

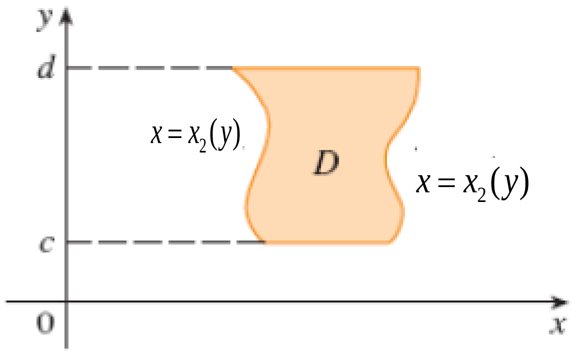
- Giả sử $D=\{(x,y):a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, y_1 và y_2 là hai hàm liên tục trên $[a,b]$. Nếu $f(x,y)$ liên tục trên D thì ta có:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$



- Giả sử $D = \{(x,y): c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, x_1 và x_2 là hai hàm liên tục trên $[c,d]$. Nếu $f(x,y)$ liên tục trên D thì ta có:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$



Với D là miền bất kỳ ta dùng các đường song song với các trục tọa độ chia D thành các miền trên.

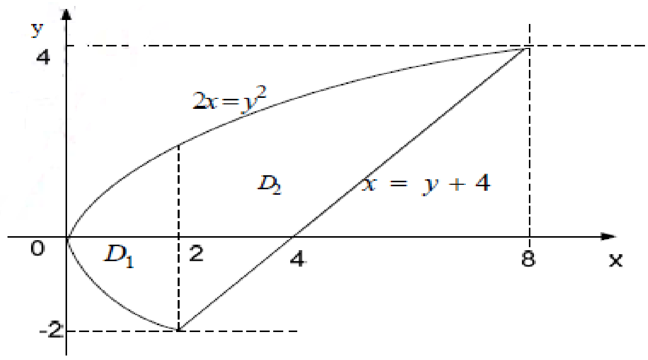
Ví dụ 3.24.

a) Tính $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $x = 2, y = \frac{1}{x}, y = x$.

Ta có: $D = \left\{1 \le x \le 2, \frac{1}{x} \le y \le x\right\}$. Do đó

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{dy}{y^2} = \int_1^2 x^2 dx \left(-\frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x} \right) = \int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{x} + x\right)dx = \int_1^2 (-x + x^3)dx = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{9}{4}$$

b) Tính $I = \iint_D xydxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $y = x - 4;\ y^2 = 2x$



Ta có: $D=\left\{-2\le y\le 4,\dfrac{y^2}{2}\le x\le y+4\right\}$ hoặc $D=D_1\cup D_2$

với $D_1=\left\{0\le x\le 2,-\sqrt{2x}\le y\le\sqrt{2x}\right\}$; $D_2=\left\{2\le x\le 8,\ x-4\le y\le\sqrt{2x}\right\}$

Trong trường hợp này ta nên lấy tích phân theo biến x trước và theo biến y sau:

$$I=\int_{-2}^{4}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}xydx=\int_{-2}^{4}y.\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}y\left(y^2+8y+16-\frac{y^4}{4}\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{8y^3}{3}+8y^2-\frac{y^6}{24}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=90$$

c) . Đổi biến trong tích phân kép.

Khi tính tích phân của những hàm $z=f(x,y)$ trên miền D phức tạp trong hệ tọa độ Oxy, tìm biến đổi $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$ để đưa miền D về miền D' trong hệ tọa độ Ouv đơn giản hơn (chẳng hạn đưa D về miền hình chữ nhật đơn giản D').

Đặt $x=x(u,v)$

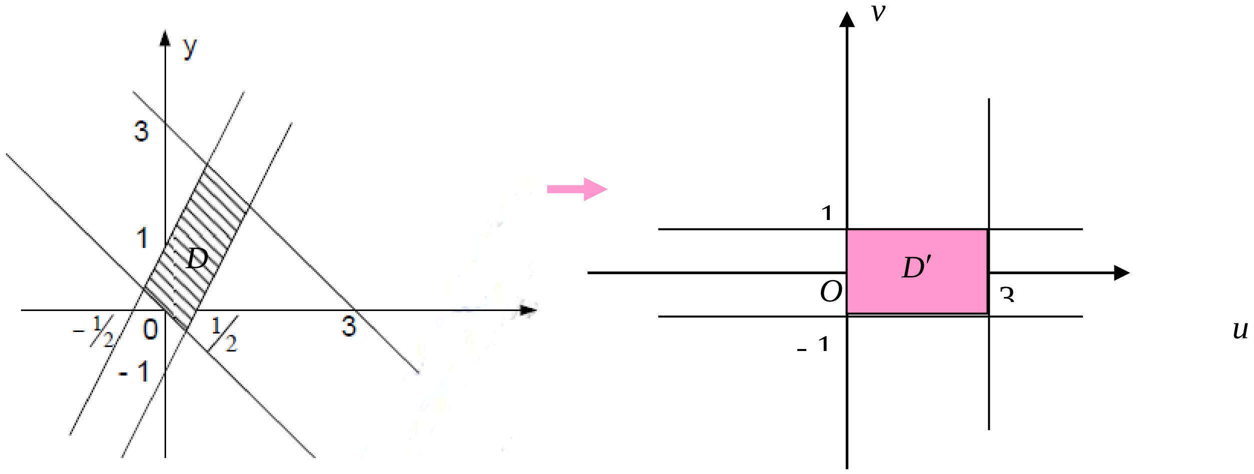
$y=y(u,v)$

Khi đó: $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J|đuv$, trong đó định thức Jacobi

$$J=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{vmatrix}}$$

Ví dụ 3.25. Tính $I=\iint\limits_D (x+y)dxdy,\ D$ là miền giới hạn bởi các đường

$x+y=0, x+y=3,-2x+y=-1,-2x+y=1$



Đặt $u=x+y,\ v=-2x+y$.

Ta có: $D'=\{0\le u\le 3,\ -1\le v\le 1\}$ và $J=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}}=\dfrac{1}{3}$

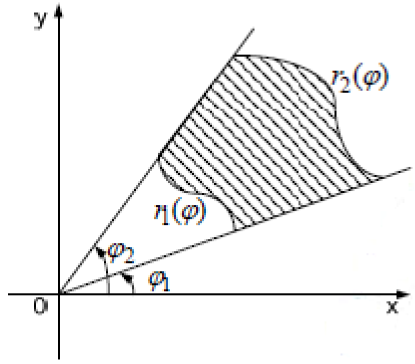
Suy ra: $I=\iint\limits_{D'}\dfrac{1}{3}ududv=\dfrac{1}{3}\int_0^3 udu\int_{-1}^{1}dv=\dfrac{1}{3}.\dfrac{u^2}{2}\Bigg|_0^3.v\Big|_{-1}^{1}=3$

Nhận xét. Nếu giải ví dụ trên bằng cách chia miền D thành các miền nhỏ rồi áp dụng tính chất (iii) của tích phân bội 2 thì sẽ phức tạp hơn nhiều so với phương pháp đổi biến.

Một trong các phép đổi biến hay được sử dụng là dùng trong hệ tọa độ cực.

Đặt $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

$D = \{(r,\theta): \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}$



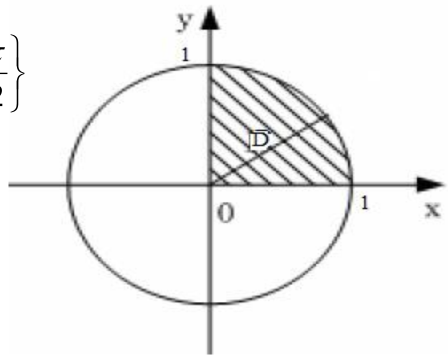
Định thức Jacobi $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$

Việc sử dụng tọa độ cực khá thuận tiện khi miền lấy tích phân là hình tròn, quạt tròn hoặc hình elip và khi biểu thức dưới dấu tích phân chứa $x^2 + y^2$

Ví dụ 3.26. Tính $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, D là một phần tư hình tròn đơn vị nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Chuyển sang tọa độ cực, miền $D = \left\{0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$

$I = \iint\limits_D \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{1+r^2}} = \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \sqrt{1+r_2}\Big|_0^1 \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$



Ví dụ 3.27. Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, D là miền xác định bởi:

$x^2 + y^2 - 2x \ge 0,\ x^2 + y^2 - 4x \le 0$

Đường tròn $x^2 + y^2 - 2x = 0$ chuyển sang tọa độ cực có phương trình

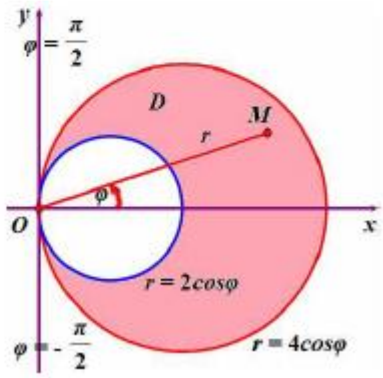
$r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi - 2r\cos\phi = 0$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow r = 2\cos\phi$

Đường tròn $x^2 + y^2 - 4x = 0$ chuyển sang tọa độ cực có phương trình

$r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi - 4r\cos\phi = 0$ $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow r = 4\cos\phi$



Vậy miền D trong hệ tọa độ cực:

$D = \left\{2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$

Do đó:

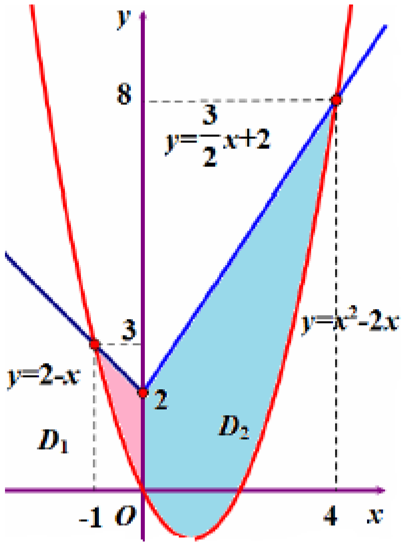
$$I=\iint_D r.r.drd\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}r^2dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left(\frac{r^3}{3}\bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\right)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{64\cos^3\varphi}{3}-\frac{8\cos^3\varphi}{3}\right)d\varphi$$

$$=\frac{56}{3}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi)\right]=\frac{56}{3}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{224}{3}$$

3.3.4.Ứng dụng của tích phân bội

a) Diện tích hình phẳng

Diện tích S của hình phẳng D là: $S=\iint_D dxdy$



Ví dụ 3.28. Tính diện tích hình phẳng D giới hạn bở

$y=x^2-2x,\ y=2-x,\ y=\frac{3}{2}x+2$

Ta có: $S=\iint_D dxdy=\iint_{D_1}dxdy+\iint_{D_2}dxdy$

$$=\int_{-1}^{0}dx\int_{x^2-2x}^{2-x}dy+\int_0^4 dx\int_{x^2-2x}^{\frac{3}{2}x+2}dy$$

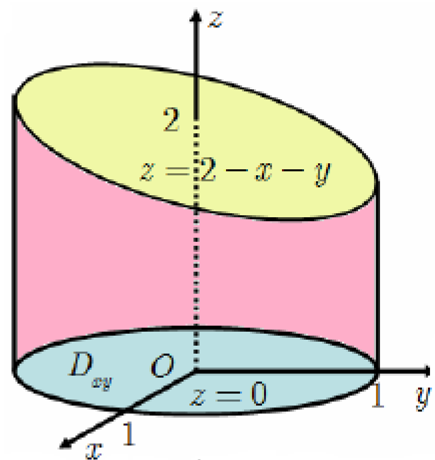
$$=\int_{-1}^{0}\left(2+x-x^2\right)dx+\int_0^4\left(\frac{7}{2}x+2-x^2\right)dx$$

$$=\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_{-1}^{0}+\left(2x+\frac{7}{4}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^4=\frac{27}{2}$$

b) Thể tích khối trụ

Cho hình trụ V có các đường sinh song song với Oz, hai đáy giới hạn bởi các mặt $z=0,\ z=f(x,y)$ với $f(x,y)>0$ và liên tục $\forall(x,y)\in D$. Khi đó thể tích khối trụ là: $V=\iint_D f(x,y)dxdy$

Ví dụ 3.29. Tính thể tích V giới hạn bởi phần hình trụ $x^2+y^2=1$ và hai mặt phẳng $x+y+z-2=0,\ z=0$



Ta có:

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D(2-x-y)dxdy$$

trong đó D là hình tròn $x^2+y^2=1$ nằm trong mặt phẳng Oxy.

Chuyển sang tọa độ cực miền $D=\{0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$

Suy ra: $V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r(2-r\cos\varphi-r\sin\varphi)dr$

$$=\int_0^{2\pi}\left(r^2-\frac{r^3}{3}\cos\varphi-\frac{r^3}{3}\sin\varphi\right)\bigg|_0^1 d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\cos\varphi}{3}-\frac{\sin\varphi}{3}\right)d\varphi=\left(\varphi-\frac{\sin\varphi}{3}+\frac{\cos\varphi}{3}\right)\bigg|_0^{2\pi}=2\pi$$

Bài tập.

Câu 1. Dùng phương pháp đổi biến tính các tích phân sau:

1) $\int x\sqrt{2-5x}dx$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

4) $\int xe^{x^2}dx$

5) $\int \sin^3 xdx$

6) $\int \frac{dx}{x\ln x.\ln(\ln x)}$

7) $\int \frac{6^x}{9^x-4^x}dx$

8) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$

9) $\int \frac{2\ln xdx}{x}$

Câu 2. Dùng phương pháp tích phân từng phần tính các tích phân sau:

1) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

2) $\int (\ln x)^2 dx$

3) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

4) $\int xshxdx$

5) $\int xe^{3x}dx$

6) $\int x\ln 5xdx$

7) $\int \sin(\ln x)dx$

8) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

9) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

10) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

11) $\int e^{2x}\cos xdx$

12) $\int x\arctan xdx$

Câu 3. Tính tích phân các phân thức hữu tỉ

1) $\int \frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}$

2) $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

3) $\int \frac{2x+5}{x^2+3x-10}dx$

4) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

Câu 4. Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\cos^2 x}dx$

2) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$

3) $\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

4) $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$

Câu 5. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

1) $\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln x)dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$

3) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|dx$

4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

Câu 6. Tính các tích phân suy rộng sau:

1) $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}$

2) $\int_{2}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2-1}+\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}$

4) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

6) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

7) $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2}$

8) $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+1)^3}$

9) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$

10) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

11) $\int_{0}^{1} x\ln x dx$

12) $\int_{0}^{1}\frac{\ln^3 x}{x}dx$

Câu 7. Tính các tích phân sau:

1) $I=\int_{1}^{2}dx\int_{0}^{\ln x}6xe^{y}dy$

2) $I=\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{y^2}3y^3.e^{xy}dx$

3) $I=\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{2x}3(x+y)dy$

4) $I=\iint_{D}\frac{x}{y}\mathrm{dxdy}$, trong đó D giới hạn bởi $y=x^2, y^2=x$

5) $I=\iint_{D}2x^2ydxdy$ trong ñoù D laø tam giaùc vôùi caùc ñænh O(0, 0); A(1, 0); B(1, 1).

6) $I=\iint_{D}(\mathrm{sinx}+2\cos y)dxdy$, trong đó D là hình chữ nhật $0\le x\le\frac{\pi}{2};0\le y\le\pi$

7) $I=\iint_{D}xy^3dxdy$, trong đó D là hình chữ nhật $0\le x\le 1;0\le y\le 2$

8) $I=\iint_{D}xydxdy$, trong đó D là hình chữ nhật $0\le x\le 1;0\le y\le 2$

9) $I=\iint_{D}e^{x+y}dxdy$, trong đó D là hình chữ nhật $0\le x\le 1;0\le y\le 1$

10) $I=\iint_{D}(x^2+y^2)dxdy$, trong đó D là hình tròn $x^2+y^2\le 1$

11) $I=\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, trong đó D là hình vành khăn $1\le x^2+y^2\le 4$

12) $I=\iint_{D}xy\mathrm{dxdy}$, trong đó D giới hạn bởi $y=x-4, y^2=2x$

13) $I=\iint_{D}(3x+2y)\mathrm{dxdy}$, trong đó D giới hạn bởi

$x+3y=1, x+3y=2, 2x-3y=0, 2x-3y=1$

14) $I = \iint\limits_{D} \mathrm{dxdy}$ với $D = \left\{ x^2 + y^2 \le 1, y \le \sqrt{3}x, y \ge 0 \right\}$

15) $I = \iint\limits_{D} 2x^2 y dxdy$ trong ñoù D laø tam giaùc vôùi caùc ñænh O(0, 0); A(1, 0); B(1, 1).

16) $I = \iint\limits_{D} \left(-\frac{1}{2} \right) dxdy$ trong ñoù D laø mieàn giôùi haïn bôûi caùc ñöôøng $y = x^2$ vaø $y = -x^2 - 2x$.

17) $I = \iint\limits_{D} (x - 3y)^2 dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi :

x+y =4, x+y=2 ,x-3y=0 , x-3y =3

18) $I = \iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{dxdy}$ với $D = \left\{ x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0 \right\}$

19) $I = \iint\limits_{D} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{dxdy}$ với $D = \left\{ x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0 \right\}$

20) $I = \iint\limits_{D} \frac{1}{x^2 + y^2} \mathrm{dxdy}$ với $D = \left\{ x^2 + y^2 \le 9 \right\}$

21) $I = \iint\limits_{D} \mathrm{dxdy}$ với $D = \left\{ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1, x \ge 0 \right\}$

Câu 8. Ñoåi thöù töï tính tích phaân

a. $I = \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2}^{4-x} f(x, y) dy.$

b. $I = \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2}^{x^2} f(x, y) dy.$

c. $I = \int\limits_{1}^{4} dy \int\limits_{y}^{y^2} f(x, y) dx.$

Chương 4. LÝ THUYẾT CHUỖI

4.1. Đại cương về chuỗi số

4.1.1.Định nghĩa. Cho dãy số $u_1, u_2, ..., u_n, ...$

Biểu thức $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ được gọi là chuỗi số và được ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ được gọi là các số hạng của chuỗi, u_n với n tổng quát gọi là số hạng tổng quát.

Tổng $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi.

Nếu S_n dần tới một giới hạn hữu hạn S khi $n \to \infty$, ta nói rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hôi tụ và có tổng bằng S. Nếu S_n không dần tới một giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$, ta nói rằng chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 4.1. Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

Ta có:

$$S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\underset{n\to\infty}{Lim}S_n=\underset{n\to\infty}{Lim}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Vậy chuỗi hội tụ và $S=1$.

Ví dụ 4.2. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$. Đó là một cấp số nhân vô hạn có công bội q.

Với $q\neq 1$: $S_n=\frac{q^n-1}{q-1}$

Nếu $|q|<1$ thì $|q^n|\to 0$ khi $n\to\infty$, do đó $\underset{n\to\infty}{Lim}S_n=\frac{1}{1-q}$. Vậy chuỗi số hội tụ và có tổng $S=\frac{1}{1-q}$.

Nếu $|q|>1$ thì $|q^n|\to\infty$ khi $n\to\infty$, do đó $\underset{n\to\infty}{Lim}S_n=\infty$. Vậy chuỗi số phân kỳ.

Nếu $q=1$ thì $S_n=n$, do đó $\underset{n\to\infty}{Lim}S_n=\infty$. Vậy chuỗi số phân kỳ.

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ hội tụ nếu $|q|<1$, phân kỳ nếu $|q|\geq 1$.

4.1.2. Điều kiện cần để chuỗi hội tụ.

Định lý. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ thì $\underset{n\to\infty}{Lim}u_n=0$.

Từ định lý trên suy ra rằng nếu u_n không dần tới không khi $n\to\infty$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ, chẳng hạn chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+3}$ phân kỳ vì số hạng tổng quát $u_n=\frac{n^2}{2n^2+3}\to\frac{1}{2}\neq 0$ khi $n\to\infty$.

Điều kiện $\underset{n\to\infty}{Lim}u_n=0$ chỉ là điều kiện cần, chứ không phải là điều kiện đủ để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

Ví dụ 4.3. Xét chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Số hạng tổng quát $u_n=\frac{1}{n}\to 0$ khi $n\to\infty$. Nhưng chuỗi số phân kỳ. Thật vậy, ta có:

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

Nếu chuỗi số hội tụ thì S_n và S_{2n} cùng dần tới một giới hạn khi $n\to\infty$, tức là $\underset{n\to\infty}{Lim}(S_{2n}-S_n)=0$. Điều này mâu thuẫn với $S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}$

4.1.3.Một số tính chất đơn giản của chuỗi số hội tụ.

i) Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ (k là hằng số) hội tụ và:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

ii) Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm v_n$ hội tụ và:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ .$$

iii) Tính chất hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số không thay đổi khi ta thêm,bớt vào chuỗi số một số hữu hạn các số hạng.

4.2.Chuỗi số dương

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với $u_n \geq 0, \forall n$ được gọi là chuỗi số dương.

4.2.1. Các định lý so sánh.

Định lý 1. Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Giả sử $u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0 \in N$. Khi đó nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ; nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì.

Ví dụ 4.4. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$ hội tụ, vì ta có $\frac{1}{n.2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \geq 1$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ.

Định lý 2. Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k > 0$ thì hai chuỗi số ấy đồng thời hội tụ hay phân kì

Ví dụ 4.5. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5}{3^n n^2}$

Chọn $u_n = \frac{1}{3^n}, \ v_n = \frac{n^2+n+5}{3^n n^2}$.

Ta có: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Và do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ hội nên suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5}{3^n n^2}$ hội tụ.

4.2.2. Các quy tắc khảo sát tính hội tụ của chuỗi số

Quy tắc D'Alembert. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ thì chuỗi số hội tụ khi $k < 1$, phân kì khi $k > 1$.

Quy tắc Cauchy. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$ thì chuỗi số hội tụ khi $k < 1$, phân kì khi $k > 1$.

Quy tắc so sánh với tích phân. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương, giảm trên khoảng $[1,+\infty)$ và dần tới 0 khi $x \to +\infty$. Khi đó tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, trong đó $u_n = f(n)$, cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Ví dụ 4.6. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

Do $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1$ nên suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ hội tụ.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Ta có: $\sqrt[n]{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Do $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = e > 1$ nên suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ phân kì.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, α là một hằng số.

Ta so sánh chuỗi trên với tích phân $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$. Do tích phân $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kì khi $\alpha \le 1$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kì khi $\alpha \le 1$.

4.3.Chuỗi có số hạng với dấu bất kì.

4.3.1. Hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với các số hạng u_n có dấu bất kì.

Định lý. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ. Điều ngược lại không đúng.

Định nghĩa. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ, là *bán hội tụ* nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kì.

Ví dụ 4.7. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Vì $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$ và vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ hội tụ. Do đó chuỗi đang xét hội tụ tuyệt đối.

4.3.2. Chuỗi số đan dấu

Chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n, \ (u_n > 0)$ được gọi là chuỗi đan dấu.

Định lý Leibniz. Nếu dãy số dương $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ giảm và dần tới 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi số đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ hội tụ.

Ví dụ 4.8. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$. Nó thỏa mãn các điều kiện của định lý Leibniz, nên nó hội tụ. Nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kì. Vậy chuỗi đang xét bán hội tụ.

4.4. Chuỗi hàm số

Mở rộng khái niệm chuỗi số, ta xét chuỗi hàm:

Cho $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ là dãy các hàm số cùng xác định trên $X \subseteq R$. Xét tổng vô hạn $u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$ được gọi là chuỗi hàm số, và ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Gọi $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Giới hạn S của dãy các tổng riêng được gọi là *tổng của chuỗi hàm số*.

Xét sự hội tụ của chuỗi hàm ta quy về xét sự hội tụ của chuỗi số, cứ mỗi $x_0 \in X$ ứng với chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, và ta xét sự hội tụ của chuỗi số đó.

4.4.1. Chuỗi lũy thừa. Bán kính hội tụ

Ta gọi chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

Định lý Abel. Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi x với $|x| < |x_0|$.

Hệ quả. . Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kì tại $x = x_1 \neq 0$ thì nó phân kì tại mọi x thỏa mãn $|x| > |x_1|$.

Rõ ràng chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ luôn hội tụ tại $x = 0$. Từ định lý Abel, suy ra rằng tồn tại một số $R \ (0 \le R < \infty)$ sao cho chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-R, R)$ và phân kì trong các khoảng $(-\infty, R)$ và $(R, +\infty)$. Tại $x = R, \ x = -R$ chuỗi lũy thừa có thể hội tụ hoặc phân kì. Số R đó được gọi là bán kính hội tụ, khoảng $(-R, R)$ được gọi là khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Muốn tìm tập hội tụ của chuỗi lũy thừa, ta tìm bán kính hội, rồi khảo sát sự hội tụ của nó tại hai mút.

4.4.2. Quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Định lý. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$ thì bán kính hội tụ R của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ được xác định bởi.

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho} & neu\ \ 0<\rho<+\infty\\ 0 & neu\ \ \rho=+\infty\\ +\infty & neu\ \ \rho=0\end{cases}$$

Ví dụ 4.9. Xét chuỗi lũy thừa $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...$

Ta có: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ trong khoảng (-1,1).

Tại $x=1$, ta có chuỗi số $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kì.

Tại $x=-1$, ta có chuỗi số $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ là chuỗi đan dấu thỏa mãn các điều kiện của định lý Leibniz, nó hội tụ.

Vậy tập hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $-1\le x<1$.

4.4.3. Tính chất của chuỗi lũy thừa.

i) Tổng của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ là một hàm số liên tục trong khoảng hội tụ của nó.

ii) Có thể lấy tích phân từng số hạng chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ trên mọi đoạn $[a,b]$ nằm trong khoảng hội tụ của nó:

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_nx^ndx$$

iii) Có thể lấy đạo hàm từng số hạng chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ tại mọi điểm nằm trong khoảng hội tụ của nó:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}+...$$

Bài tập.

Câu 1. Sử dụng định nghĩa khảo sát sự hội tụ và tính tổng S của các chuỗi số sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ 4) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+5)}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{2n}2$

Câu 2. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{n^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+5}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$

Câu 3. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n.4^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2}(x+3)^n$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n+1}}{2n+1}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n(x-1)^n$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n$

Chương 5. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Khi nghiên cứu sự phụ thuộc lẫn nhau giữa các đại lượng, nhiều khi không thể thiết lập một cách trưc tiếp quy luật phụ thuộc hàm số, mà có thể dễ dàng thiết lập mối liên hệ giữa các đại lượng có quan hệ hàm số và các đạo hàm hoặc vi phân của hàm số biểu diễn sự phụ thuộc một đại lượng vào các đại lượng khác. Chẳng hạn, ta xét ví dụ sau:

Cho một vật có khối lượng m rơi tự do trong không khí. Giả sử sức cản của không khí tỉ lệ với vận tốc rơi là $v(t)$ vào thời điểm t với hệ số tỉ lệ là $k>0$. Tìm $v(t)$.

Khi vật rơi thì lực tác dụng lên vật gồm có: Lực hút trái đất mg và lực cản không khí $kv(t)$.

Theo định luật Newton: $F=ma$, trong đó F là hợp lực tác động lên vật và a là gia tốc chuyển động. Do gia tốc $a=\frac{dv}{dt}$, nên ta có phương trình:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \quad (*)$$

Vậy vận tốc v của vật rơi tự do thỏa mãn phương trình (*) với sự xuất hiện của đạo hàm của v. Những phương trình như vậy ta sẽ gọi là phương trình vi phân.

5.1. Các khái niệm cơ bản

Phương trình vi phân là một phương trình chứa biến độc lập, hàm phải tìm và các đạo hàm hoặc vi phân của nó.

Phương trình vi phân với hàm số phải tìm là hàm số một biến số được gọi là *phương trình vi phân thường.*

Phương trình vi phân với hàm số phải tìm là hàm số nhiều biến số được gọi là *phương trình đạo hàm riêng*.

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân của hàm phải tìm có mặt trong phương trình đó, chẳng hạn $y' + xy^2 - 2y = \sin x$ là phương trình vi phân cấp 1, $y'' - 3y' = 0$ là phương trình vi phân cấp 2.

Trong chương này chúng ta chỉ đề cập đến phương trình vi phân thường.

Phương trình vi phân thường cấp n có dạng tổng quát như sau:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

Phương trình vi phân được gọi là tuyến tính nếu F là bậc nhất đối với $y, y', y'', ..., y^{(n)}$. Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp n là

$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = b(x)$, trong đó $a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x), b(x)$ là những hàm số cho trước.

Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm số thỏa mãn phương trình ấy, tức là mọi hàm số sao cho khi thế nó vào phương trình ta được một đồng nhất thức. Chẳng hạn, các hàm số $y = \sin x + C$, trong đó C là các hằng số tùy ý, là nghiệm của phương trình $y' = \cos x.$

Giải một phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó. Về mặt hình học mỗi nghiệm của phương trình vi phân xác định một đường gọi là *đường tích phân* của phương trình. Giải một phương trình vi phân là tìm tất cả các đường tích phân.

5.2. Phương trình vi phân cấp 1.

5.2.1. Khái quát chung về phương trình vi phân cấp một.

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp một là

(5.1) $\quad F\left(x, y, y'\right) = 0$

Nếu giải được phương trình ấy đối với y', phương trình sẽ có dạng

(5.2) $\quad y' = f\left(x, y\right)$

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (5.2) thỏa mãn điều kiện $y = y_0$ khi $x = x_0$ trong đó x_0, y_0 là các số thực cho trước được gọi là bài toán Cauchy. Điều kiện $y = y_0$ khi $x = x_0$ được gọi là điều kiện ban đầu.

Hàm số $y = \varphi\left(x, C\right)$ được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân nếu khi gán cho C một số bất kỳ một số thực ta được một nghiệm của phương trình đó.

Đôi khi ta không tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (5.2) dưới dạng tường minh $y = \varphi\left(x, C\right)$, mà tìm được một hệ thức có dạng $\phi\left(x, y, C\right) = 0$, nó xác định nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn. Hệ thức ấy được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình (5.2).

Nghiệm riêng của phương trình (5.2) là mọi hàm số $y = \varphi\left(x, C_0\right)$mà ta được bằng cách cho C trong nghiệm tổng quát một giá trị xác định C_0. Hệ thức

$\phi(x, y, C_0) = 0$ mà ta được bằng cách cho C trong tích phân tổng quát lấy giá trị C_0 được gọi là *tích phân riêng.*

Phương trình (5.2) có thể có một số nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát, những nghiệm ấy được gọi là *nghiệm kì dị*.

5.2.2. Phương trình với biến số phân li.

Là phương trình có dạng

(5.3) $f(x)dx + g(y)dy = 0$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

hay $F(x) + G(y) = C$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, $G(y)$ là một nguyên hàm của $g(y)$.

Ví dụ 5.1. Giải phương trình $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$

Nếu $x \neq 0, y \neq 0$,chia hai vế của phương trình cho xy, ta được:

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0$$

Lấy tích phân hai vế: $\int\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \int\left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = C$

Nghiệm tổng quát của phương trình: $\ln|x| + x + \ln|y| - y = C$

Dễ thấy $x = 0, y = 0$ cũng thỏa mãn phương trình, chúng là nghiệm kì dị.

Ví dụ 5.2. Tìm nghiệm riêng của phương trình $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ thỏa mãn điều kiện $y(1) = 0$.

Thay $y' = \frac{dy}{dx}$, phương trình trở thành

$$\frac{ydy}{xdx} + e^y = 0$$

$$\Leftrightarrow ydy + xe^y dx = 0$$

$$\Leftrightarrow ye^{-y}dy + xdx = 0$$

Lấy tích phân hai vế, ta được nghiệm tổng quát: $-ye^{-y} - e^{-y} + \frac{x^2}{2} = C$

Theo điều kiện ban đầu thì $y = 0$ khi $x = 1$, do đó: $-1 + \frac{1}{2} = C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$

Vậy nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$ là

$$-ye^{-y} - e^{-y} + \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}$$

5.2.3. Phương trình thuần nhất

Là phương trình có dạng

(5.4) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Đặt $y = ux$, trong đó u là một hàm số của x, suy ra:

$y' = u + xu' = f(u)$ hay $x\frac{du}{dx} = f(u) - u$

Do đó, nếu $f(u) - u \neq 0$ thì phương trình (5.4) đưa về phương trình với biến số phân li $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{f(u) - u}$

Ví dụ 5.3. Giải phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$

Đặt $y = ux \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$. Thay vào phương trình, ta được:

$$x\frac{du}{dx} + u = u + \tan u$$

$$\Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = \tan u$$

$$\Leftrightarrow xdu = \tan u dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{\tan u} = \frac{dx}{x} \; (\tan u \neq 0)$$

Tích phân hai vế, ta được

$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C|$ hay $\sin u = Cx$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$

Ví dụ 5.4. Giải phương trình $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$

Ta có: $y' = \dfrac{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\dfrac{y}{x}}$

Đặt $y = ux$, suy ra $x\dfrac{du}{dx} + u = \dfrac{1 + u^2}{2u}$

$$\Leftrightarrow \frac{xdu}{dx} = \frac{1 - u^2}{2u}$$

$$\Leftrightarrow xdu = \frac{1 - u^2}{2u}dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{2udu}{u^2 - 1} + \frac{dx}{x} = 0 \; (u \neq \pm 1)$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|u^2 - 1| + \ln|x| = \ln[C]$$

$$\Leftrightarrow (u^2 - 1)x = C$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là $\left(\dfrac{y^2}{x^2} - 1\right)x = C$ hay $y^2 - x^2 = Cx$

Nếu $u = \pm 1 \Leftrightarrow y = \pm x$ thay vào phương trình, ta có: $\pm 1 = \pm 1$ nên $y = \pm x$ là nghiệm kì dị.

5.2.4. Phương trình tuyến tính cấp một.

Là phương trình có dạng

(5.5) $y' + p(x)y = q(x)$, trong đó $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục. Phương trình tuyến tính được gọi là thuần nhất nếu $q(x) = 0$, là không thuần nhất nếu $q(x) \neq 0$.

Để giải phương trình (5.5) ta tính $A(x)=e^{-\int p(x)dx}$, $B(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}$.

Khi đó, phương trình (5.5) có nghiệm tổng quát là:

$y=A(x)[B(x)+C]$, với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 5.5. Giải phương trình $y'+2xy=xe^{-x^2}$

Ta có:

$$A(x)=e^{-\int 2xdx}=e^{-x^2}$$

$$B(x)=\int xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx=\int xdx=\frac{x^2}{2}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình: $y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)$

Ví dụ 5.6. Giải phương trình $y'-\frac{2y}{x}=3x^4$

Ta có :

$$A(x)=e^{\int\frac{2dx}{x}}=e^{2\ln|x|}=x^2$$

$$B(x)=\int 3x^4e^{-\int\frac{2dx}{x}}dx=\int 3x^2dx=x^3$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình: $y=x^2(x^3+C)$

Ví dụ 5.7. Tìm nghiệm riêng của phương trình $y'+y\cot x=x$ thỏa mãn điều kiện $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Ta có:

$$A(x)=e^{-\int\cot xdx}=e^{-\ln|\sin x|}=\frac{1}{\sin x}$$

$$B(x)=\int xe^{\int\cot xdx}dx=\int x\sin xdx=-x\cos x+\sin x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình: $\frac{1}{\sin x}(-x\cos x+\sin x+C)=0$

Theo điều kiện ban đầu thì $y=0$ khi $x=\frac{\pi}{2}$, do đó:

$1+C=0\Leftrightarrow C=-1$

Vậy nghiệm riêng của phương trình: $\frac{1}{\sin x}(-x\cos x+\sin x-1)=0$

5.2.5. Phương trình Bernoulli

Là phương trình có dạng

(5.6) $y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$, trong đó $p(x),q(x)$ là những hàm số liên tục, $\alpha\in R,\alpha\neq 0,\neq 1$ (với $\alpha=0$ hoặc $\alpha=1$, phương trình này trở thành phương trình tuyến tính).

Chia hai vế (5.6) cho y^{α}, ta được

$$y^{-\alpha}y'+p(x)y^{1-\alpha}=q(x)$$

Đặt $z=y^{1-\alpha}\Rightarrow y'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Phương trình đưa về dạng phương trình tuyến tính cấp một đối với z: $\frac{z'}{1-\alpha}+p(x)z=q(x)$

Ví dụ 5.8. Giải phương trình $y'-2xy=2x^3y^2$ $(\alpha=2)$

Chia hai vế của phương trình (5.9) cho $y^2, (y \neq 0)$ ta được:

$y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 2x^3$

Đặt $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y'$

Phương trình đã cho trở thành: $-z' - 2xz = 2x^3$

Giải phương trình tuyến tính này ta tìm được: $z = Ce^{-x^2} + 1 - x^2$

Từ đây ta suy ra nghiệm tổng quát của phương trình: $y = \dfrac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}$

$y = 0$ là nghiệm kì dị của phương trình.

5.2.6. Phương trình vi phân toàn phần

Là phương có dạng

(5.7) $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, trong đó $P(x,y), Q(x,y)$ là những hàm số liên tục, có đạo hàm riêng thỏa mãn $P'_y = Q'_x$. Khi đó $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Hàm $u(x,y)$ được xác định:

(5.8) $u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$

hoặc $u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$

Nghiệm tổng quát của phương trình: $u(x,y) = C$ (C là hằng số tùy ý)

Ví dụ 5.9. Giải phương trình $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$

Ta có: $P'_y = Q'_x = 1$

Vậy $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x,y)$. Tín $u(x,y)$ theo công thức (5.8) với $x_0 = y_0 = 0$, ta được:

$$u(x,y) = \int\limits_0^x (x + y + 1)dx + \int\limits_0^y (3 - y^2)dy = \frac{x^2}{2} + yx + x + 3y - \frac{y^3}{3}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình: $\dfrac{x^2}{2} + yx + x + 3y - \dfrac{y^3}{3} = C$

5.3. Phương trình vi phân cấp hai

5.3.1. Khái quát chung về phương trình vi phân cấp hai

Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng

(5.9) $F(x,y,y',y'') = 0$

Nếu giải được phương trình ấy đối với y'', nó có dạng

(5.10) $y'' = f(x,y,y')$

Họ hàm số $y = \varphi(x,C_1,C_2)$ gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai (5.10) nếu khi gán cho mỗi C_1, C_2 một số bất kì ta được nghiệm của phương trình đó. Mỗi nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi gán cho mỗi C_1, C_2 một số xác định được gọi là nghiệm riêng của phương trình.

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (5.10) thỏa mãn điều kiện

$y = y_0, y' = y_0$ khi $x = x_0$ trong đó x_0, y_0, y'_0 là các số thực cho trước được gọi là bài toán Cauchy. Điều kiện $y = y_0, y' = y_0$ khi $x = x_0$ được gọi là điều kiện ban đầu.

5.3.2. Phương trình khuyết

a) Phương trình khuyết y, y'

(5.11) $y'' = f(x)$.

Lấy tích phân hai lần ta có nghiệm tổng quát: $y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2$, trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 5.10. Giải phương trình $y''=e^{\frac{x}{2}}$

Ta có: $y'=\int e^{\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+C_1$

$$y=\int\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}+C_1\right)dx=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}+C_1x+C_2$$

Ví dụ 5.11 Giải phương trình $y''-\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}=0$

$$y''=\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

Ta có:

$$y'=\int\frac{xdx}{\left(x^2+4\right)^2}=-\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}+C_1$$

$$y=\int-\left(\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}+C_1\right)dx=-\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2}+C_1x+C_2$$

b) Phương trình khuyết y

(5.12) $y''=f(x,y')$

Đặt $p=y'$, ta có: $p'=y''$. Phương trình (5.12) được đưa về phương trình cấp một đối với p.

Ví dụ 5.12. Giải phương trình $y''=\frac{y'}{x}$

Đặt $p=y'$, $p'=y''$. Phương trình trở thành:

$p'=\frac{p}{x}$ hay $\frac{dp}{p}=\frac{p}{x}$

$\Leftrightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\ln|p|=\ln|x|+\ln|C_1|$ hay $p=C_1x$

Thay $p=y'$, ta được: $y'=C_1x$

Tích phân hai vế, ta được nghiệm tổng quát của phương trình: $y=\frac{C_1x^2}{2}+C_2$

c) Phương trình khuyết x

(5.13) $y''=f(y,y')$

Đặt $p=y'$, ta có: $y''=\frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$. Thay vào phương trình (5.13), phương trình trở thành phương trình cấp một đối với p.

Ví dụ 5.13. Giải phương trình $2yy''=y'^2+1$

Đặt $p=y'$, $y''=p\frac{dp}{dy}$. Phương trình trở thành

$$2yp\frac{dp}{dy}=p^2+1$$

$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{2pdp}{p^2+1}$

Lấy tích phân hai vế, ta được:

$\ln|p| = \ln(1+p^2) + \ln|C_1|$ hay $y = C_1(1+p^2)$

5.3.3. Phương trình tuyến tính cấp hai với hệ số hằng.

Là phương trình có dạng

(5.14) $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, trong đó a_1, a_2 là hai hằng số.

Phương trình được gọi là *thuần nhất* nếu $f(x)=0$, là *không thuần nhất* nếu $f(x)\neq 0$.

a) Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

(5.15) $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

Định lí. Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính (nghĩa là $\dfrac{y_1(x)}{y_1(x)} \neq$ const) của phương trình (5.15) thì nghiệm tổng quát của phương trình (5.15) là $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, trong đó C_1, C_2 là những hằng số tùy ý.

Từ định lí trên cho thấy muốn tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (5.15), ta chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó. Ta sẽ tìm nghiệm riêng của nó dưới dạng $y = e^{kx}$, trong đó k là một hằng số nào đó mà ta sẽ tìm. Đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của hàm số này là:

$y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$.

Thế vào phương trình (5.15) ta được:

$e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) = 0$

Vì $e^{kx} \neq 0$ nên suy ra

(5.16) $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$

Vậy nếu k thỏa mãn phương trình (5.16) thì hàm số $y = e^{kx}$ là một nghiệm của phương trình (5.15). Phương trình (5.16) gọi là phương trình đặc trưng của phương trình vi phân (5.15). Đó là một phương trình bậc hai, nó có hai nghiệm k_1, k_2 thực hoặc phức. Có thể xảy ra 3 trường hợp:

1) k_1, k_2 là 2 số thực khác nhau. Khi đó phương trình (5.15) có 2 nghiệm riêng: $y = e^{k_1 x}, y = e^{k_2 x}$. Hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính vì $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = e^{(k_1-k_2)x} \neq$ const. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (5.15):

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý.

2) k_1, k_2 là 2 số thực trùng nhau $k_1 = k_2 = k$. Ta có 1 nghiệm riêng $y_1 = e^{kx}$, ta tìm được 1 nghiệm riêng $y_2 = xe^{kx}$ độc lập tuyến tính với y_1. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (5.15): $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$

3) k_1, k_2 là 2 số phức liên hợp $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$.

Hai nghiệm riêng của phương trình (5.15) là $\overline{y_1} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$, $\overline{y_2} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$.

Dùng công thức Euler: $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$

$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$$

$\overline{y_1}, \overline{y_2}$ là hai nghiệm của phương trình (5.15) thì $y_1 = \frac{1}{2}\left(\overline{y_1} + \overline{y_2}\right) = e^{\alpha x}\cos\beta x$; $y_2 = \frac{1}{2i}\left(\overline{y_1} - \overline{y_2}\right) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ cũng là nghiệm của phương trình ấy. Hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính (vì $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \cot x \neq \text{const}$). Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (5.15) là $y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$

Ví dụ 5.14. Giải phương trình $y'' - 5y' + 6y = 0$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 5k + 6 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt $k_1 = 2, k_2 = 3$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

Ví dụ 5.16. Giải phương trình $y'' + 10y' + 25y = 0$

Phương trình đặc trưng $k^2 + 10k + 25 = 0$ có một nghiệm kép $k_1 = k_2 = -5$.

Nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x}$.

Ví dụ 5.17. Giải phương trình $y'' - 2y' + 10y = 0$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 10 = 0$ có hai nghiệm phức liên hợp $k_{1,2} = 1 \pm 3i$.

Nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = e^x\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)$.

b) Phương trình tuyến tính không thuần nhất

(5.17) $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$

Ở trên ta đã tìm được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (5.15) . Vậy để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (5.17) ta áp dụng phương pháp biến thiên hằng số sau đây:

Giả sử nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng (5.15) là $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, trong đó C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (5.17) được tìm dưới dạng $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, trong đó $C_1(x), C_2(x)$ là hai hàm số thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

Ví dụ 5.18. Giải phương trình $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$

Phương trình thuần nhất tương ứng: $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -2$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là: $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$, với C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý.

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất: $y = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)xe^{-2x}$, với $C_1(x), C_2(x)$ là hai hàm số thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} C_1'e^{-2x} + C_2'xe^{-2x} = 0 \\ -2C_1'e^{-2x} + C_2'e^{-2x} - 2C_2'xe^{-2x} = e^{-2x}\ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' + C_2'x = 0 \\ -2C_1' + C_2' - 2xC_2' = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -x\ln x \\ C_2' = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{x^2}{2} + K_1 \\ C_2 = x\ln x - x + K_2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $y = \left(-\dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{x^2}{2} + K_1\right)e^{-2x} + \left(x\ln x - x + K_2\right)xe^{-2x}$

c) Vài dạng đặc biệt - phương pháp hệ số bất định

Đối với một số dạng đặc biệt của vế phải $f(x)$, có thể tìm được một nghiệm riêng của phương trình (5.17) mà không cần một phép tính tích phân nào. Chỉ cần cộng nghiệm riêng ấy vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (5.15) ta sẽ được nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (5.17). Ta sẽ tìm nghiệm riêng của (5.17) trong 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1. $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n, α là hằng số.

- Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của (5.15), ta tìm một nghiệm riêng của (5.17) có dạng $Y = e^{\alpha x}Q_n(x)$, trong đó $Q_n(x)$ là một đa thức bậc n.
- Nếu α là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng của (5.15), ta tìm một nghiệm riêng của (5.17) có dạng $Y = e^{\alpha x}xQ_n(x)$, trong đó $Q_n(x)$ là một đa thức bậc n.
- Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng của (5.15), ta tìm một nghiệm riêng của (5.17) có dạng $Y = e^{\alpha x}x^2Q_n(x)$, trong đó $Q_n(x)$ là một đa thức bậc n.

Trường hợp 2. $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, trong đó $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là những đa thức bậc n,m, α, β là các hằng số.

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của (5.15), ta tìm một nghiệm riêng của (5.17) có dạng $Y = e^{\alpha x}(K_l(x)\cos\beta x + H_l(x)\sin\beta x)$, trong đó $K_l(x), H_l(x)$ là các đa thức bậc $l = \max(m,n)$.
- Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng của (5.15), ta tìm một nghiệm riêng của (5.17) có dạng $Y = e^{\alpha x}x(K_l(x)\cos\beta x + H_l(x)\sin\beta x)$, trong đó $K_l(x), H_l(x)$ là các đa thức bậc $l = \max(m,n)$.

Ví dụ 5.19. Giải phương trình $y'' + 3y' - 4y = x$

Phương trình thuần nhất tương ứng: $y'' + 3y' - 4y = 0$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 3k - 4 = 0$ có 2 nghiệm đơn $k_1 = 1, k_2 = -4$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$

Vế phải của phương trình có dạng: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, trong đó $\alpha = 0, P_1(x) = x$

$\alpha = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, vậy ta tìm nghiệm riêng của phương trình có dạng $Y = Ax + B$.

$\Rightarrow Y' = A,\ Y''' = 0$

Thế vào phương trình trên, ta được: $3A - 4Ax - 4B = x$

Suy ra : $-4A = 1,\ 3A - 4B = 0 \Leftrightarrow A = -\dfrac{1}{4}, B = -\dfrac{3}{16} \Rightarrow Y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{16}$

Nghiệm tổng quát phải tìm là: $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{16} + C_1e^x + C_2e^{-4x}$

Ví dụ 5.20. Giải phương trình $y'' + y = 4x\sin x$

Phương trình thuần nhất tương ứng: $y'' + y = 0$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0$ có 2 nghiệm phức $k_{1,2} = \pm i$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Vế phải của phương trình có dạng: $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x)$, trong đó $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ P_0(x) = 0,\ Q_1(x) = 4x$

$\alpha \pm \beta = \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, vậy ta tìm nghiệm riêng của phương trình có dạng $Y = x\big((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\big)$.

$$\Rightarrow Y' = \cos x\left(Cx^2 + 2Ax + Dx + B\right) + \sin x\left(-Ax^2 + 2Cx - Bx + D\right)$$

$$Y'' = \cos x\left(-Ax^2 + 4Cx - Bx + 2D + 2A\right) + \sin x\left(-Cx^2 - 4Ax - Dx - 2B + 2C\right)$$

Thế vào phương trình trên, ta được:

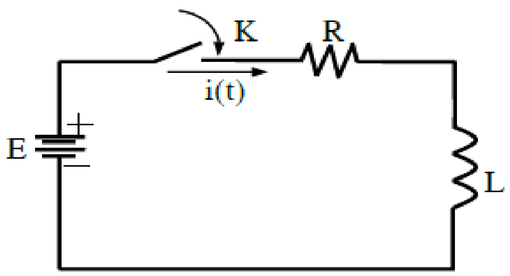
$$(4Cx + 2D + 2A)\cos x + (-4Ax - 2B + 2C) = 4x\sin x$$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta có: $A = -1, B = 0, C = 0, D = 1 \Rightarrow Y = x(\sin x - x\cos x)$

Nghiệm tổng quát phải tìm là: $y = x(\sin x - x\cos x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Ví dụ 5.21. (Bài toán quá độ)

Cho mạch điện như hình vẽ:



Tại t = 0 đóng khóa K lại. Tìm cường độ dòng điện $i(t)$ chạy trong mạch điện.

Khi khóa K đóng: $E = U_R + U_L$

Mà $U_R = iR$; $U_L = L\dfrac{di}{dt}$

Ta có: $iR + L\dfrac{di}{dt} = E$ .Vậy để tìm cường độ dòng điện $i(t)$ ta phải giải phương trình trên. Đây là phương trình tuyến tính cấp một đối với $i(t)$. Giải ra ta được: $i(t) = \dfrac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$

Bài tập.

Câu 1. Gi¶i c¸c ph-¬ng tr×nh vi phân cÊp 1 sau:

1) $y' - 3\dfrac{y}{x} = x^4 \ln x$

2) $5y' - 4y = \dfrac{x^4}{y^4}$

3) $2xydx + dy = 0$

4) $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$

9) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

10) $\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2$

11) $y'\sqrt{4 + x^2} + y = 0$

12) $y'\cos^2 x + y = 1 + tg^2 x$

5) $y' = x^2 e^x$

6) $y' \cos x = \dfrac{y}{\ln y}$

7) $\dfrac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

8) $x\left(1+x^2\right)y' - \left(x^2-1\right)y + 2x = 0$

13) $(1+y^2)dx + x\ln x dy = 0$

14) $(y+e^x)dx + xdy = 0$

15) $2ydx + \left(y^2 - 6x\right)dy = 0$

16) $y' + xy = x^3 y^3$

Câu 2. Gi¶i c¸c ph-¬ng tr×nh vi phân cÊp 2 sau:

1) $y'' = x - xy'$

2) $e^{2x} y'' - 4 = 0$

3) $y'' - 4y' + 3y = e^{3x} \sin x$

4) $y'' - 2y' + 2y = 2e^x$

5) $y'' + y = \tan x$

6) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

7) $y'' - 3y' = 2 - 6x$

8) $y'' + \dfrac{3}{x} y' = 0$

9) $y'' + 4y' = 2e^{2x}$

10) $y'' - 3y' + 2y = 0$

11) $y'' \cos^2 x - 1 = 0$

12) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x$

13) $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$

14) $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$

Câu 3. Giải các bài toán Cauchy sau:

1) $\dfrac{dx}{x\left(y-1\right)} + \dfrac{dy}{y\left(x+1\right)} = 0;\ \ y\left(1\right) = 1$

2) $\left(1+e^{2x}\right) y^2 dy = e^x dx;\ \ y\left(0\right) = 0$

3) $\sin x dy - y \ln y dx = 0;\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^2$

4) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = \left(x+1\right)^3;\ \ y\left(0\right) = \dfrac{1}{2}$

5) $\left(1+x^2\right) y' + xy = 1;\ \ y\left(0\right) = 0$

6) $y'' - 2y' + 2y = 5\cos x;\ \ y\left(0\right) = 1;\ y'\left(0\right) = 0$