1.1 Số xấp xỉ, sai số tuyệt đối và tương đối

1.1.1. Số xấp xỉ.

Định nghĩa 1.1. a gọi là số xấp xỉ của số đúng A,ký hiệu $a \approx A$,nếu a khác a không đáng kể và được dùng thay cho A trong tính toán.

Nếu a<A thì a gọi là xấp xỉ thiếu.

Nếu a>A thì a gọi là xấp xỉ thừa.

Ví dụ 1: $3{,}14 < \pi < 3{,}14$

1.1.2. Sai số tuyệt đối

Định nghĩa 1.2.

Hiệu $\Delta_a = A - a$ (hoặc $\Delta_a = a - A$) gọi là sai số của xấp xỉ a.

Trị tuyệt đối $\Delta = |\Delta_a| = |A - a|$ gọi là sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a.

Định nghĩa 1.3. Sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a là số không nhỏ hơn sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a.

Ví dụ 2: Xác định sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a = 3,14 thay cho số π

1.1.3.Sai số tương đối.

Định nghĩa 1.4. sai số tương đối của số xấp xỉ a, ký hiệu δ ,là :

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} = \frac{|A-a|}{|A|}$$

Định nghĩa 1.5. Sai số tương đối giới hạn của số xấp xỉ a, ký hiệu δ_a là số không nhỏ hơn sai số tương đối của số xấp xỉ a.

$$\Delta_a = |A|.\delta_a \qquad (*)$$

Trong thực hành thay cho công thức (*) người ta thường dùng công thức:

$$\Delta_a = |a|.\delta_a \qquad (**)$$

1.2. Cách viết số xấp xỉ.

1.2.1. Chữ số có nghĩa.

Định nghĩa 1.6. Những chữ số có nghĩa của một số là những chữ số của số đó kể từ chữ số khác không đầu tiên tính từ trái sang phải.

Ví dụ 3. Số 0,2405 có 4 chữ số có nghĩa.

1.2.2. Chữ số đáng tin.

Mọi số thực a đều có thể biểu diễn dưới dạng:

$$a = \pm(a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + ... + a_{m-n+1}10^{m-n+1})$$

trong đó $m \in Z, 0 \le a_i \le 9 (i = m-1, m-2, ...)$

Ví dụ 4: $574{,}35 = 5.10^2 + 7.10^1 + 4.10^0 + 3.10^{-1} + 5.10^{-2}$

Định nghĩa 1.7. Chữ số a_{m-n+1} gọi là chữ số đáng tin nếu $\Delta_a \le \frac{1}{2}.10^{m-n+1}$

và gọi là chữ số đáng ngờ nếu $\Delta_a > \frac{1}{2}.10^{m-n+1}$

Ví dụ 5. Số xấp xỉ a = 2,4576 với $\Delta_a = 0{,}0045$ có 3 chữ số đáng tin là 2,4,5 và 2 chữ số đáng ngờ là 7,6.

1.2.3. Cách viết số xấp xỉ.

Cách thứ nhất: Viết số xấp xỉ a kèm theo sai số tuyệt đối giới hạn.

Cách thứ hai: Viết theo quy ước : mọi chữ số có nghĩa đều là những chữ số đáng tin.

1.3. Sự quy tròn và sai số quy tròn.(tự đọc)

1.4. Xác định sai số của hàm số biết sai số của đối số.

1.4.1. Công thức tổng quát của sai số.

Cho hàm số khả vi: $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. $\Delta x_i (i = \overline{1,n})$ là sai số tuyệt đối giới hạn của các đối số $x_i (i = \overline{1,n})$

Khi đó: $$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $u = \ln(x_1 + x_2^2)$. Xác định giá trị của hàm số u tại $x_1 = 0{,}97; x_2 = 1{,}132$, sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn, biết mọi chữ số có nghĩa của x_1 và x_2 là những chữ số đáng tin.

1.4.2. Sai số của tổng đại số.

Xét hàm số $u = \pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm ... \pm x_n$

$$\Delta_u = \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n$$

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|}$$

1.4.3. Sai số của tích .

Xét hàm số $u = x_1.x_2...x_n$

Ta có: $$\delta_u = \delta x_1 + \delta x_2 + ... + \delta x_n$$

$$\Delta_u = |u|.\delta_u$$

1.4.4. Sai số của thương.

Xét hàm số $u = \dfrac{x_1}{x_2}$

Ta có: $$\delta_u = \delta x_1 + \delta x_2$$

$$\Delta_u = |u|.\delta_u$$

Bài tập luyện tập:

Câu 1. Cho a) $a_1 = 1{,}3241; \Delta_{a_1} = 0{,}45.10^{-4}$

b) $a_2 = 0{,}5364; \Delta_{a_2} = 0{,}5.10^{-3}$

Hãy xác định các chữ số đáng tin trong a_1, a_2

Câu 2. Cho a) $a_1 = 23{,}8541; \delta_{a_1} = 0{,}3.10^{-3}$

b) $a_1 = 5{,}3442; \delta_{a_2} = 0{,}1.10^{-2}$

Hãy xác định các chữ số đáng tin trong a_1,a_2

Câu 3. Hãy tính tích u của hai số xấp xỉ viết theo cách thứ hai: $x_1 = 12{,}2$; $x_2 = 73{,}56$ và xác định số chữ số đáng tin của tích u.

<u>Chương 2.</u> Tính gần đúng nghiệm thực của phương trình đại số và siêu việt.

2.1.Đặt vấn đề.

Tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ (2.1)

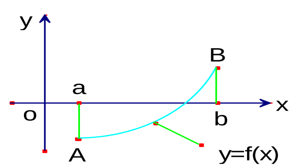
Các bước tính gần đúng nghiệm thực của phương trình (2.1):

Bước 1. Tìm khoảng cách li nghiệm, nghĩa là tìm khoảng (a,b) chứa một và chỉ một nghiệm thực của phương trình (2.1).

Bước 2. Xuất phát từ khoảng cách li nghiệm ở bước 1,tính gần đúng nghiệm thực của phương trình (2.1) đạt độ chính xác yêu cầu bằng một phương pháp gần đúng.

2.2.Khoảng cách li nghiệm

Định lý . Nếu hàm số f(x) liên tục trong khoảng (a,b) , f(a).f(b) < 0,f(x) tồn tại và giữ dấu không đổi trong (a,b) thì phương trình f(x) = 0 có một nghiệm thực ξ duy nhất.



a) Phương pháp giải tích

Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và phương trình $f'(x) = 0$ dễ tìm nghiệm. Để tìm khoảng cách ly nghiệm của phương trình ta chỉ cần xác định dấu của hàm số $f(x)$ tại hai đầu mút của khoảng xác định và tại các nghiệm hoặc lân cận các nghiệm phương trình $f'(x) = 0$.

Ví dụ: Tìm khoảng cách ly nghiệm của phương trình: $f(x) = 2^x - 5x - 3 = 0$

Giải: $f'(x) = 2^x \ln 2 - 5$. Do đó $f'(x) = 0$ $khi: x = \dfrac{\lg 5 - \lg \ln 2}{\lg 2} \approx 2{,}85$

Bảng xét dấu:

x	-∞	2	3	+∞
$f(x)$	+	-	-	+

Từ bảng trên ta suy ra phương trình có 2 nghiệm thực. Thu hẹp miền khảo sát ta có bảng sau:

x	-1 0 2 3 4 5
$f(x)$	+ - - - - +

Từ bảng này ta có hai khoảng cách ly nghiệm là (-1, 0) và (4, 5)

b) Phương pháp hình học.(tự đọc)

2.3. Phương pháp lặp.

2.3.1. Nội dung phương pháp.

Giả sử (a,b) là khoảng cách li nghiệm của phương trình (2.1). Đưa phương trình (2.1) về phương trình tương đương $x = \varphi(x)$

trong đó φ có tính chất:

i) $\varphi(x) \in [a,b], \forall x \in [a,b]$

ii) $|\varphi'(x)| \le q < 1, \ \forall x \in [a,b]$

Chọn $x_0 \in [a,b]$ làm nghiệm gần đúng ban đầu .

Thay x_0 vào vế phải của (2.2) ,ta nhận được nghiệm gần đúng x_1

Lặp lại quá trình trên, ta nhận được các nghiệm gần đúng $\{x_n\}, n = 1,2,3,...$

Công thức lặp: $x_n = \varphi(x_{n-1})$

Điều kiện dừng: $|x_{n-1} - x_n|.\dfrac{q}{1-q} \le \varepsilon$ với ε là độ chính xác cho trước.

2.3.2. Đánh giá sai số

Đánh giá độ lệch của nghiệm gần đúng x_n và nghiệm đúng ξ:

$$|x_n - \xi| \le \frac{q}{1-q}|x_{n-1} - x_n|$$

$$|x_n - \xi| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

Bài tập luyện tập:

Câu 1. Tìm khoảng cách li nghiệm thực của các phương trình sau:

a) $x^4 - 4x - 1 = 0$

b) $x - \cos x = 0$

Câu 2. Dùng phương pháp lặp,tìm nghiệm gần đúng với đọ chính xác 10^{-3} của:

a) $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$, biết khoảng cách li nghiệm là (-2,75; -2,5).

b) $x - \cos x = 0$

2.4. Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

2.4.1. Nội dung phương pháp

Giả sử (a,b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình f(x)=0, $f'(x), f''(x)$ giữ dấu không đổi trong (a,b).

Chọn $x = x_0$ (a hoặc b) sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với $f''(x)$

<u>Công thức lặp.</u> $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2.4.2. Đánh giá sai số

Đặt $m = \min\left\{\left|f'(x)\right| / x \in [a,b]\right\}$

$M = \max\left\{\left|f''(x)\right| / x \in [a,b]\right\}$

Ta có ước lượng

$$|x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m} \quad (*)$$

$$|x_n - \xi| \le \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 \quad (**)$$

Ví dụ: Tìm nghiệm gần đúng của phương trình : $f(x) = x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = 0$ bằng phương pháp tiếp tuyến, biết khoảng cách li nghiệm là (1,1;1,4).

Giải: Ta có:

$f'(x) = 3x^2 - 0,4x - 0,2 > 0$

$f''(x) = 6x - 0,4 > 0$ với mọi $x \in (1,1;1,4)$

f(1,4) = 0,872 cùng dấu với f''(x).

Chọn $x_0 = 1,4$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x)} \approx 1,22969$$

$$x_2 \approx 1,20079$$

$$m = \min_{x\in[1,1;1,4]} f'(x) = 2,99$$

$$M = \max_{x\in[1,1;1,4]} f''(x) = 8$$

Dừng lại tại x_2 ta có thể đánh giá độ lệch giữa x_2 và nghiệm đúng ξ:

$$|x_2 - \xi| \le \frac{M}{2m}|x_2 - x_1|^2 \le 0,00112$$

Chương 3. Giải hệ thống phương trình đạu số tuyến tính.

3.1. Đặt vấn đề.

Hệ n phương trình n ẩn:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (*)$$

Hoặc dưới dạng ma trận $Ax = b$,trong đó A là ma trận hệ số

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Còn b và x là véctơ vế phải và véc tơ ẩn số

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3.2. Phương pháp Gauss

Nội dung phương pháp.

Khử dần các ẩn số để đưa hệ(*) về hệ tam giác (ma trận hệ số là ma trận tam giác trên).

Ví dụ : Giải $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$

Bài tập luyện tập:

Dùng phương pháp tiếp tuyến , tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-2} của :

a) $x^3 + 3x + 5x = 0$ biết khoảng cách li nghiệm là (-1,5; -1).

b) $x^4 + 3x + 1 = 0$

3.3. Chuẩn của ma trận và chuẩn của véc tơ.

Chuẩn của ma trận $A = (a_{ii})$ là một số thực ký hiệu $\|A\|$, thỏa mãn những điều kiện sau:

a. $\|A\| \geq 0$ với $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

b. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \quad \alpha \in \Re$

c. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

c. $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$

người ta thường dùng ba chuẩn ma trận sau:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_j |a_{ij}|; \ \|A\|_2 = (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}; \ \|A\|_3 = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Chuẩn véc tơ:

Cho véc tơ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

Tính $\|A\|_1 ; \|A\|_2 ; \|A\|_3$

$$\|A\|_1 = \max\left(2+5+6;1+3+7;4+2+3\right) = 13$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\left(2^2+1^2+5^2+3^2+2^2+6^2+7^2+3^2\right)} = \sqrt{153}$$

$$\|A\|_3 = \max\left(2+1+4;5+3+2;6+7+3\right)$$

3.4. Phương pháp lặp đơn.

3.4.1. Nội dung phương pháp.

Xét hệ thống phương trình $Ax = b$ (*).

Đưa (*) về dạng tương đương sau: $x = \alpha x + \beta$ (**)

Trong đó $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

Chọn một véc tơ $x^{(0)}$ ban đầu (thường chọn $x^{(0)} = \beta$) .

Tính $x^{(k+1)} = \alpha x^k + \beta,\quad k = 0,1,2,3.....$

Nếu dãy các véc tơ lặp $x^{(0)}, x^{(1)},..., x^{(k)},...$ có giới hạn thì giới hạn đó là nghiệm đúng của hệ phương trình(*).

3.4.2. Sự hội tụ của phương pháp.

Quá trình lặp đơn hội tụ đến nghiệm duy nhất của hệ phương trình(*),không phụ thuộc vào việc lựa chọn véc tơ xấp xỉ ban đầu nếu $\|\alpha\|_p < 1$.

3.4.3. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng.

Công thức đánh giá sai số giữa nghiệm gần đúng $x^{(k)}$ và nghiệm đúng x^*:

$$\left\|x^{(k)} - x^{(*)}\right\|_p \le \frac{\|\alpha\|_p}{1-\|\alpha\|_p}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_p$$

$$\left\|x^{(k)} - x^{(*)}\right\|_p \le \frac{(\|\alpha\|_p)^k}{1-\|\alpha\|_p}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_p$$

Nếu $\|\alpha\|_p \le \frac{1}{2}$ thì ta có đánh giá sau: $\left\|x^{(k)} - x^{(*)}\right\|_p \le \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_p$

Chú ý: $\|.\|_p$ nêu trong mục b và c có thể dùng $\|.\|_\infty, \|.\|_1, \|.\|_2$

Ví dụ: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

Giải: Chia phương trình một cho 4,phương trinh hai cho 3, phương trình ba cho 4, ta được:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3 \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3 \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$\sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{1j}\right| = 0 + 0,06 + 0,02 = 0,08$$

$$\sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{1j}\right| = 0,03 + 0 + 0,05 = 0,08$$

\

$$\sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{1j}\right| = 0,01 + 0,02 + 0 = 0,03$$

$$\Rightarrow \|\alpha\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{ij}\right| = \max\left(0,08; 0,08; 0,03\right) = 0,08$$

Chọn $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Tính toán ta có:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1,92	3.19	5,04
2	1,9094	3,1944	5,0446
3	1,909228	3,194948	5.044794

Nếu ta xem $x^{(3)}$ là nghiệm gần đúng cần tìm, ta có thể đánh giá sai số

$$\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_\infty = \max_i \left|x_i^{(3)} - x_i^{(2)}\right| = \max(0.000172, 0.000548, 0.000194) = 0.000548$$

và $\left\|x^{(3)} - x^{(*)}\right\|_\infty = \dfrac{0.08}{1-0.08}(0.000548) = 0.0000476$

Bài tập luyện tập:

Giải hệ thống phương trình : $\begin{cases} 24{,}21x_1 + 2{,}42x_2 + 3{,}85x_3 = 30{,}24 \\ 2{,}31x_1 + 31{,}49x_2 + 1{,}51x_3 = 40{,}96 \\ 3{,}49x_1 + 4{,}85x_2 + 28{,}73x_3 = 42{,}81 \end{cases}$

Bằng phương pháp lặp cho tới khi $\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|_\infty \le 10^{-4}$ và đánh giá sai số của nghiệm gần đúng nhận được.

Chương 4. Đa thức nội suy và phương pháp bình phương bé nhất.

4.1. Đa thức nội suy

Cho y = f(x) , biết các giá trị $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ của hàm số tại các điểm $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ của đoạn [a,b].Cần tính giá trị của hàm tại các điểm không trùng với $x_i, i = \overline{1,n}$

Ta xây dựng một đa thức $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ thoả mãn $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = 0,1,2,3,...,n.$

$P_n(x)$ gọi là đa thức nội suy của hàm f(x) ,các điểm $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ gọi là các nút nội suy.

Ta dùng đa thức nội suy $P_n(x)$ thay cho hàm số f(x) để tính gần đúng giá trị của hàm số f(x) tại các điểm $x \ne x_i, i = \overline{1,n}$.

$x \in (x_0, x_n)$ thì phép tính trên gọi là phép tính nội suy.

$x \notin (x_0, x_n)$ thì phép tính trên gọi là phép tính ngoại suy.

Định lý. Đa thức nội suy $P_n(x)$ của hàm số f(x) nếu có, thì chỉ có một mà thôi.

4.2. Đa thức nội suy Newton.

4.2.1. Trường hợp các nút nội suy không cách đều.

a) Tỷ hiệu.

Giả sử hàm số y = f(x) được cho dưới dạng bảng

x	x_0	x_1	x_2	....	x_i	x_{i+1}	...
y	y_0	y_1	y_2	...	y_i	y_{i+1}	...

Trong đó $y_i = f(x_i),\ i = 0,1,2,...$ và $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \neq 0\,(i = 0,1,2,...)$ không bằng nhau.

Tỷ hiệu cấp một: $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i},\ (i = 0,1,2,...)$

Tỷ hiệu cấp hai: $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i},\ (i = 0,1,2,...)$

Tỷ hiệu cấp n: $f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n}] = \dfrac{f[x_{i+1}, ..., x_{i+n}] - f[x_i, ..., x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$

Chú ý: i) $f[x_i, x_{i+1}] = f[x_{i+1}, x_i]$

ii) Tỷ hiệu cấp n của một đa thức bậc n bằng hằng số; tỷ hiệu cấp lớn hơn n của đa thức bậc n bằng 0;

Bài tập luyện tập:

Giải hệ thống phương trình : $\begin{cases} 24,21x_1 + 2,42x_2 + 3,85x_3 = 30,24 \\ 2,31x_1 + 31,49x_2 + 1,51x_3 = 40,96 \\ 3,49x_1 + 4,85x_2 + 28,73x_3 = 42,81 \end{cases}$

Bằng phương pháp lặp cho tới khi $\left\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right\|_\infty \leq 10^{-4}$ và đánh giá sai số của nghiệm gần đúng nhận được.

4.2.1. Đa thức nội suy Newton trường hợp các nút nội suy không cách đều.

Giả sử trên đoạn [a,b] cho (n+1) giá trị khác nhau của đối số $x_0, x_1, ..., x_n$ (các x_i không cách đều) và các giá trị tương ứng $f(x_i) = y_i,\ i = \overline{0,n}$.

Đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút x_0:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + ... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

Sai số: $R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) f[x, x_0, x_1, ..., x_n]$

Đa thức nội suy lùi xuất phát từ nút x_n

$$P_n(x) = y_n + (x - x_n) f[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + ...$$
$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1) f[x_n, x_{n-1}, ..., x_0]$$

Sai số: $R_n(x) = (x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_0) f\left[x, x_n, x_{n-1}, ..., x_0\right]$

Chú ý: - Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm liên tục đến cấp (n+1) trên [a,b] chứa tất cả các nút nội suy $x_i,\ i = \overline{0,n}$ thì sai số tính theo công thức:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

Ví dụ: Cho bảng giá trị của hàm số y = f(x)

x	0	2	3	5	6
f(x)	1	3	2	5	6

a) Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút $x_0 = 0$ của hàm số y = f(x).

b) Tính f(1,25).

Giải: Tỷ hiệu các cấp của hàm số y = f(x) được tính trong bảng sau:

x	y	Tỷ hiệu cấp 1	Tỷ hiệu cấp 2	Tỷ hiệu cấp 3	Tỷ hiệu cấp 4
0	1				
2	3	1			
3	2	-1	-2/3		
5	5	3/2	5/6	3/10	
6	6	1	-1/6	-1/4	-11/120

a) Đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút $x_0 = 0$:

$P_4(x) = 1 + 1.x + (-2/3).x.(x-2) + 3/10.x.(x-2)(x-3) + (-11/120).x(x-2)(x-3)(x-5)$

b) $f(1{,}25) = P(1{,}25) = 3{,}9311525$

4.2.2. Trường hợp các nút nội suy cách đều.

a) Hiệu hữu hạn.

x	x_0	x_1	x_2	....	x_i	x_{i+1}	$\dots$
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_i	y_{i+1}	$\dots$

Trong đó:

$y_i = f(x_i),\ i = 0,1,2,...$

$x_i = x_0 + ih,\ (h > 0)$

Hiệu hữu hạn tiến cấp một: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

Hiệu hữu hạn tiến cấp hai: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$

Hiệu hữu hạn tiến cấp n: $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$

Hiệu hữu hạn lùi cấp một: $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$

Hiệu hữu hạn lùi cấp hai: $\nabla^2 y_i = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$

Hiệu hữu hạn lùi cấp n: $\nabla^n y_i = \nabla^{n-1} y_i - \nabla^{n-1} y_{i-1}$

b)Đa thức nội suy Newton

Đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ nút x_0:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + ht) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{t(t-1)(t-2)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Sai số : $R_n(x) = \dfrac{h^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} t(t-1)...(t-n)$

Đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ nút x_n:

$$P_n(x) = P_n(x_n + ht) = y_n + t\nabla y_n + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_n + ... + \frac{t(t+1)(t+2)...(t+n-1)}{n!}\nabla^n y_n$$

Sai số: $R_n(x) = \dfrac{h^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} t(t+1)...(t+n)$

Ví dụ: Cho bảng giá trị hàm số y = sinx

x	15^o	20^o	25^o	30^o
f(x)	0,258819	0,342020	0,422618	0,5

a) Dùng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút $x_0 = 15^o$, tính gần đúng $\sin 16^o$.
b) Đánh giá sai số nhận được.

Giải: a) h = 5^0. Bảng các hiệu hữu hạn tiến:

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
15^0	0,258819			
20^0	0,342020	0,083201		
25^0	0,422618	0,080598	-0,002603	
30^0	0,5	0,077382	-0,003216	-0,000613

Ta có: $t = \dfrac{x - x_0}{h} = 0,2$

$$\sin 16^0 \approx 0,258819 + 0,2.0,83201 + \frac{0,2(-0,8)}{2!}(-0,002603) + \frac{0,2(-0,8)(-1,8)}{3!}(-0,000613) \approx 0,275638$$

c) Đánh giá sai số

Ta có: $\left|\sin^{(4)}(x)\right| \le 1, \forall x$

$$\left|R_3(16^0)\right| = \left|\sin 16^0 - 0,275638\right| \le \frac{1}{4!}\left(\frac{5\Pi}{180}\right)^4 \left|(0,2)(-0,8)(-1,8)(-2,8)\right| \le 0,0000019 \approx 0,000002$$

Bài tập luyện tập:

Câu 1. Cho bảng giá trị của hàm số y = f(x)

x	-1	0	3	6	7
f(x)	3	-6	39	822	1611

a) Xây dựng đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ nút $x_n = 7$ của hàm số y = f(x).

b) Dùng đa thức nội suy nhận được tính gần đúng f(7,25)

Câu 2. Cho bảng giá trị của hàm số y = f(x)

x	0	2	4	6	8
f(x)	-1	2	3	4	6

a) Tìm hàm nội suy Newton tiến xuất phát từ nút $x_0 = 0$.

b) Tính giá trị nội suy tại x = 1 và đánh giá sai số.

4.3. Phương pháp bình phương nhỏ nhất.

4.3.1. Trường hợp y phụ thuộc các tham số một cách tuyến tính.

a. y = ax + b

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

b. $y = a + bx + cx^2$

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

Ví dụ: Cho bảng các giá trị

x	0,56	0,84	1,14	2,44	3,16
y	-0,8	-0,97	-0,98	1,07	3,66

Hãy lập công thức thực nghiêm có dạng $y = a + bx + cx^2$.

Giải: Ta có bảng sau:

	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
	0,56	0,314	0,176	0,098	-0,80	-0,448	-0,251
	0,84	0,706	0,593	0,498	-0,97	-0,815	-0,685
	1,14	1,300	1,482	1,690	-0,98	-1,117	-1,274
	2,44	5,954	14,527	35,445	1,07	2,611	6,371

	3,16	9,986	31,554	99,712	3,66	11,566	36,549
$\sum_{i=1}^{5}$	8,14	18,260	48,332	137,443	1,98	11,797	40,710

Ta có hệ: $\begin{cases} 5a + 8{,}14b + 18{,}260c = 1{,}98 \\ 8{,}14a + 18{,}260b + 48{,}332c = 11{,}797 \\ 18{,}260a + 48{,}332b + 137{,}443c = 40{,}710 \end{cases}$

$a \approx 0, b \approx -2, c \approx 1$. Vậy $y = x^2 - 2x$.

4.3.2. Trường hợp y phụ thuộc các tham số một cách phi tuyến (tự đọc).

CHƯƠNG 5. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH.

5.1. Đặt vấn đề.

Để tính gần đúng tích phân xác định trên $[a,b]$. Ta thay hàm số dưới dấu tích phân $f(x)$ bằng đa thức nội suy $P_n(x)$ và xem: $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$.

5.2. Công thức hình thang và sai số.

5.2.1. Trường hợp đoạn [a,b] gồm hai nút nội suy

Chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn bằng nhau, có độ dài $h = \dfrac{b-a}{n}$, theo các điểm chia : $x_0 = a, x_1 = a + h, ..., x_n = b$

5.2.2. Công thức hình thang tổng quát

Ta có công thức hình thang tổng quát sau:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right)$$

Sai số: $R = -\dfrac{(b-a)h^2}{12} f''(c),\ c \in [a,b]$

Ví dụ: Dùng công thức hình thang tổng quát với n = 10 , tính gần đúng :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

Đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được.

Giải:

Ta có: h = 0,1

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.1	0.90909
2	0.2	0.83333
3	0.3	0.76923
4	0.4	0.71429
5	0.5	0.66667
6	0.6	0.62500
7	0.7	0.58824
8	0.8	0.55556
9	0.9	0.52632
10	1	0.5

$$I = 0{,}1\left(\frac{1+0{,}5}{2} + 0{,}90909 + 0{,}83333 + 0{,}76923 + 0{,}71429 + 0{,}66667 + 0{,}625 + 0{,}58824 + 0{,}55556 + 0{,}52632\right)$$

$$= 0{,}69377$$

Ta có:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Từ đó: $\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f''(x)\right| = 2$ và $\left|R\right| \le \dfrac{(b-a)h^2}{12}\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f''(x) \approx 0{,}002\right|$

Vậy $I = 0{,}694 \pm 0{,}002$

Bài tập luyện tập:

Tính tích phân sau bằng công thức hình thang và đánh giá sai số.

$I = \int\limits_0^1 \ln\dfrac{2x+1}{x+3}dx$ với khoảng chia $n = 10$.

5.3. Công thức Simpson

5.3.1. Trường hợp đoạn [a,b] gồm ba nút nội suy

5.3.2.Công thức Simpson tổng quát và sai số.

Chia đoạn $[a,b]$ thành n = 2m đoạn bằng nhau, có độ dài $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{b-a}{2m}$,

theo các điểm chia : $x_0 = a, x_1 = a+h, ..., x_n = x_{2m} = b$

Ta có công thức Simpson tổng quát sau:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2m} + 4\sigma_1 + 2\sigma_2\right)$$

Trong đó: $\sigma_1 = y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}$; $\sigma_2 = y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}$

Sai số: $R = -\dfrac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(c),\ c \in [a,b]$

Ví dụ: Dùng công thức Simpson 1/3 tổng quát với n = 10 , tính gần đúng :

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\ln(x+1)}$$

Giải:

Ta có: h = 0,1

i	x_i	y_{2j-1}	y_{2j}

0	0		$y_0 = 1$
1	0.1	0,912983	
2	0.2		0,845794
3	0.3	0,792164	
4	0.4		0,748239
5	0.5	0,711508	
6	0.6		0,68027
7	0.7	0,653327	
8	0.8		0,629808
9	0.9	0,609068	
10	1		0,590616
$\sum$		$\sigma_1 = 3{,}67905$	$\sigma_2 = 2{,}90411$

$$I = \frac{0{,}1}{3}\{1 + 2{,}90411 + 4.3{,}67905 + 2.2{,}90411\} = 0{,}737168$$

Bài tập luyện tập:

Câu 1: Tính tích phân sau bằng công thức Simpson $1/3$ và đánh giá sai số.

$I = \int_0^{0{,}12} \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)dx$ với khoảng chia $n = 12$.

Câu 2: Cho tích phân $I = \int_{0{,}1}^{1{,}1} \frac{1}{(1+4x)^2}dx$

a) Tính gần đúng tích phân trên bằng công thức Simpson tổng quát (Simpson $1/3$); chia đoạn $[0{,}1;\ 1{,}1]$ thành 8 đoạn bằng nhau.
b) Đánh giá sai số của giá trị gần đúng tìm được.

Câu 3: Cho tích phân $I = \int_{1,1}^{2,1} \frac{x^2}{x+1} dx$

c) Để tính gần đúng tích phân trên bằng công thức Simpson tổng quát (Simpson $\frac{1}{3}$), cần chia đoạn $[1,1;2,1]$ thành bao nhiêu đoạn bằng nhau (n=?) để đạt được sai số nhỏ hơn 10^{-6}

d) Với n tìm được, hãy tính tích phân trên bằng công thức hình thang.

Chương 6. Giải gần đúng phương trình vi phân thường.

6.1. Đặt vấn đề.

Bài toán cauchy đối với phương trình vi phân cấp 1:

Tìm nghiệm y =y(x) thỏa mãn: $\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = \alpha \end{cases} \quad x_0 \le x \le X$

trong đó hàm f(x,y) là một hàm đã biết của hai đối số x,y; x_0,X và α là những số cho trước. Điều kiện $y(x_0) = \alpha$ gọi là điều kiện ban đầu.

6.2. Phương pháp ơle.

Xét bài toán: $\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = \alpha \end{cases} \quad x_0 \le x \le X$

Ta chia $[x_0, X]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia x_i:

$x_i = x_0 + ih,\ i = 0,1,...,n-1$

$x_n = X;\ h = \frac{X - x_0}{n}$

Giả sử đã biết giá trị gần đúng y_i, cần tính giá trị gần đúng y_{i+1}.

Công thức ơle: $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),\ i = \overline{0, n-1}$ với $y_0 = y(x_0) = \alpha$ đã biết.

Ví dụ: Cho bài toán cauchy sau: $y' = \frac{1}{2}xy,\ y(0) = 1$

Hãy tìm nghiệm gần đúng bằng phương pháp ơle trên [0,1],chọ h= 0,1.

Giải

Ta có x_i = 0, i = 0,1,2,…,10.

$f(x,y) = \frac{1}{2}xy,\ y_0 = 1$

i	x_i	$f(x_i, y_i)$	$hf(x_i, y_i)$	y_i
0	0	0	0	1
1	0.1	0.05	0.005	1
2	0.2	0.1005	0.01005	1.005
3	0.3	0.1522575	0.015226	1.01505
4	0.4	0.20605515	0.020606	1.030276
5	0.5	0.26272032	0.026272	1.050881
6	0.6	0.32314599	0.032315	1.077153
7	0.7	0.38831376	0.038831	1.109468

8	0.8	0.45931971	0.045932	1.148299
9	0.9	0.53740406	0.05374	1.194231
10	1	0.62398582	0.062399	1.247972

6.2. Phương pháp Runge- Kutta.

Xét bài toán: $\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = \alpha \end{cases} \quad x_0 \le x \le X$

Ta chia $[x_0, X]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia x_i:

$x_i = x_0 + ih,\ i = 0,1,...,n-1$

$x_n = X;\ h = \dfrac{X - x_0}{n}$

Giả sử đã biết giá trị gần đúng y_i, cần tính giá trị gần đúng y_{i+1}.

Công thức Runge- Kutta:

$y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$

$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$

$k_2^{(i)} = hf(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1^{(i)}}{2})$

$k_3^{(i)} = hf(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_2^{(i)}}{2})$

$k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \qquad i = \overline{0, n-1}$

Ví dụ: Cho bài toán cauchy sau:

$y' = x + y,\ \ y(0) = 1$

Hãy tìm nghiệm gần đúng bằng phương pháp Runge- Kutta trên [0,0.5], chọn h=0,1.

Giải.

Ta có: x_i = 0,1.i; i = 0,1,2,3,4,5

Tính y_1 xuất phát từ điều kiện ban đầu y(0) = 1 = y_0

Ta có: $\begin{cases} k_1^{(0)} = 0{,}1(0+1) = 0{,}1 \\ k_2^{(0)} = 0{,}1[(0+0{,}05)+(1+0{,}05)] = 0{,}11 \\ k_3^{(0)} = 0{,}1[(0+0{,}05)+(1+0{,}055)] = 0{,}1105 \\ k_4^{(0)} = 0{,}1[(0+0{,}1)+(1+0{,}1105)] = 0{,}12105 \end{cases}$

Từ đó: $y_1 = 1 + \dfrac{1}{6}(0{,}1 + 2.0{,}11 + 2.0{,}1105 + 0{,}12105) = 0{,}1103$

Tính y_2,y_3,y_4,y_5 hoàn toàn tương tự

i	x	y	k = 0.1(x+y	Δy	
0	0	1	0.1	0.1	
	0.05	1.05	0.11	0.22	
	0.05	1.055	0.1105	0.221	
	0.1	1.1105	0.12105	0.12105	0.110341667
1	0.1	1.110342	0.1210342	0.1210342	
	0.15	1.170859	0.1320859	0.2641718	
	0.15	1.176385	0.1326385	0.2652769	
	0.2	1.24298	0.144298	0.144298	0.132463475
2	0.2	1.242805	0.1442805	0.1442805	
	0.25	1.314945	0.1564945	0.3129891	
	0.25	1.321052	0.1571052	0.3142105	
	0.3	1.39991	0.169991	0.169991	0.156911852
3	0.3	1.399717	0.1699717	0.1699717	
	0.35	1.484703	0.1834703	0.3669406	
	0.35	1.491452	0.1841452	0.3682904	
	0.4	1.583862	0.1983862	0.1983862	0.183931486
4	0.4	1.583648	0.1983648	0.1983648	
	0.45	1.682831	0.2132831	0.4265662	
	0.45	1.69029	0.214029	0.428058	
	0.5	1.797677	0.2297677	0.2297677	0.213792797
5	05	1.797441	0.2297441	0.2297441	

Bài tập luyện tập:

Cho bài toán Cauchy $y' = \frac{1}{2}(x+y);\ \ y(0) = 1$. Hãy tìm nghiệm gần đúng bằng phương pháp Runge-Kutta trên đoạn $[0;\ 0,5]$. Chọn bước $h = 0,25$ và đánh giá sai số.