Chương 1. Bài toán tối ưu hóa tổng quát và các vấn đề cơ sở

1.1. Bài toán tối ưu hóa tổng quát và phân loại các bài toán

1.1.1. Bài toán tối ưu hóa tổng quát

Cực đại hóa (cực tiểu hóa) hàm:

$$f(x) \to \max(\min) \quad (1.1)$$

Với các điều kiện $g_i(x)(\leq, =, \geq) b_i, i = \overline{1, m}$ (1.2)

$$x \in X \subset R^n \quad (1.3)$$

Bài toán (1.1) – (1.3) được gọi là một quy hoạch, hàm f(x) được gọi là hàm mục tiêu, các hàm $g_i(x), i = \overline{1, m}$ được gọi là các hàm ràng buộc, mỗi đẳng thức hay bất đẳng thức trong hệ (1.2) được gọi là một ràng buộc. Mỗi tập $D = \{x \in X \mid g_i(x)(\leq, =, \geq) b_i, i = \overline{1, m}\}$ được gọi là miền ràng buộc. Mỗi điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ được gọi là một phương án. Một phương án $x^* \in D$ đạt cực đại (hay cực tiểu) của hàm mục tiêu được gọi là phương án tói ưu. Giá trị $f(x^*)$ được gọi là giá trị tối ưu của bài toán.

1.1.2. Phân loại các bài toán

- Bài toán Quy hoạch tuyến tính
- Bài toán Quy hoạch tham số
- Bài toán Quy hoạch động
- Bài toán Quy hoạch phi tuyến
- Bài toán Quy hoạch rời rạc
- Bài toán Quy hoạch đa mục tiêu

1.2. Vấn đề mô hình hóa toán học

1.2.1. Xây dựng mô hình hóa toán học cho một vấn đề thực tế

Bước 1. Xây dựng mô hình định tính cho vấn đề thực tế

Bước 2. Xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xem xét

Bước 3. Sử dụng các công cụ toán học để khảo sát và giải quyết bài toán hình thành trong bước 2.

Bước 4. Phân tích và kiểm định lại các kết quả tính toán thu được trong bước 3.

1.2.2. Một số mô hình thực tế

a) Bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu

Một công ty muốn sản xuất hai loại sản phẩm mới A và B bằng các loại nguyên liệu I, II, III. Chi phí nguyên liệu để sản xuất các sản phẩm đó cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Sản phẩm	
	A	B
I	2	1
II	1	2
III	0	1

Dự trữ các loại nguyên liệu I, II, III tương ứng là 8,7,3 đơn vị. Tiền lãi một đơn vị sản phẩm A và B tương ứng là 4 triệu đồng và 5 triệu đồng. cần lập kế hoạch sản xuất sao cho công ty thu được tiền lãi lớn nhất với điều kiện hạn chế về nguyên liệu.

Lập bài toán.

Kí hiệu x_1 là lượng sản phẩm loại A, x_2 là lượng sản phẩm loại B cần sản xuất.

Mô hình toán học có dạng: $f(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

* Bài toán lập kế hoạch sản xuất tổng quát có dạng như sau:

Giả sử công ty sản xuất n sản phẩm và sử dụng m nguyên liệu. Ta đưa vào các ký hiệu sau:

x_j : lượng sản phẩm loai j cần sản xuất($j = \overline{1,n}$)

c_j : tiền lãi một đơn vị sản phẩm loại j

a_{ij} :chi phí ngyên liệu loại I để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại j.

b_i : lượng dự trữ nguyên liệu loại i, ($i = \overline{1,m}$)

Trong các điều kiện đã cho hãy xác định các giá trị x_j, $j = \overline{1,n}$ sao cho tổng tiền lãi là lớn nhất với điều kiện hạn chế về nguyên liệu.

Mô hình toán học có dạng: $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

b) Bài toán vận tải

Có m kho hàng cùng chứa một loại hàng hóa (đánh số $i = \overline{1,m}$), lượng hàng có ở kho i là a_i. Gọi kho i là điểm phát i. Có n địa điểm tiêu thụ loại hàng hóa trên (đánh số $j = \overline{1,n}$), với nhu cầu tiêu thụ ở điểm j là b_j ($j = \overline{1,n}$). Gọi điểm tiêu thụ j là điểm thu j. Biết c_{ij} là cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ điểm phát i đến điểm thu j. Hàng có thể chuyển từ điểm phát i đến điểm thu j bất kỳ. Lập kế hoạch vận chuyển hàng hóa từ điểm phát đến điểm thu sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất với các điều kiện: Các điểm phát thì phát hết hàng, các điểm thu thì thỏa mãn nhu cầu.

Ký hiệu x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ điểm phát i đến điểm thu j. Ta có mô hình toán học:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=\overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=\overline{1,n} \\ x_{ij} \ge 0, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\end{cases}$$

c) Bài toán vốn đầu tư nhỏ nhất

Ví dụ. Một xí nghiệp xử lí giấy, có ba phân xưởng I, II, III cùng xử lí ba loại giấy A, B, C. Do ba phân xưởng có nhiều sự khác nhau, nên nếu cùng đầu tư 10 triệu đồng vào mỗi phân xưởng thì cuối kỳ phân xưởng I xử lí được 6 tạ giấy loại A, 1 tạ giấy loại B, 3 tạ giấy loại C. Trong khi đó phâ xưởng II xử lí được 2 tạ giấy loại A, 7 tạ giấy loại B, 1 tạ giấy loại C. Phân xưởng III xử lí được 1 tạ giấy loại A, 3 tạ loại B, 8 tạ giấy loại C. Theo yêu cầu lao động thì cuối kỳ Xí nghiệp phải xử lí được ít nhất 2 tấn giấy loại A, 2.5 tấn giấy loại B, 3 tấn giấy loại C. Hỏi cần đầu tư vào mỗi phân xưởng bao nhiêu tiền để xí nghiệp thỏa: hoàn thành công việc và giá tiền đầu tư là nhỏ nhất.

Lập bài toán.Gọi x_1 , x_2, x_3 (đơn vị 10 triệu đồng) lần lượt là số tiền đầu tư vào các phân xưởng I, II, III. Khi đó số tiền mà xí nghiệp đầu tư là $f = x_1 + x_2 + x_3$.

Ta có bài toán: tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f = x_1 + x_2 + x_3$ với các ràng buộc

$$\begin{cases}6x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 20 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 \ge 25 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 \ge 30\end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1,2,3$

1.3. Một số khái niệm và kết quả từ đại số

1.3.1.Ma trận

a) *Định nghĩa*. Một bảng số chữ nhật có m hàng, n cột

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}.............a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}.............a_{2n} \\ .... & \\ a_{m1} & a_{m2}............a_{m.n} \end{bmatrix}$$

gọi là một ma trận cỡ $m \times n$. Phần tử a_{ij} là phần tử ở hàng thứ i cột thứ j của ma trận A. Ta gọi i là chỉ số hàng và j là chỉ số cột.

Để đơn giản ma trận A còn được viết dưới dạng $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

Ma trận A cỡ $n \times n$ được gọi là ma trận vuông cấp n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}.............a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}.............a_{2n} \\ .... & \\ a_{n1} & a_{n2}............a_{nn} \end{bmatrix}$$

Các phần tử $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ...a_{nn}$ gọi là các phần tử chéo. Đường thẳng xuyên qua các phần tử chéo gọi là đường chéo chính.

Ma trận

$$I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ & . & .. & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$ được gọi là ma trận đơn vị cấp n.

Ma trận cỡ $1 \times n$ được gọi là ma trận hàng. Ma trận cỡ $n \times 1$ được gọi là ma trận cột.

Ma trận A cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & . & .. & \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$ trong đó $a_{\text{ij}} = 0$ nếu i>j, gọi là ma trận tam giác trên.

Ma trận A cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ & . & .. & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$ trong đó $a_{\text{ij}} = 0$ nếu i<j, gọi là ma trận tam giác dưới.

Ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng không gọi là ma trận không và ký hiệu là 0.

Hai ma trận A và B gọi là bằng nhau nếu chúng cùng cỡ và các phần tử cùng vị trí bằng nhau, tức là

1) $A = \left[a_{\text{ij}}\right]_{m\times n};\ B = \left[b_{\text{ij}}\right]_{m\times n}$

2) $a_{ij} = b_{\text{ij}},\ \forall i, j$

b) Các phép toán ma trận

Phép cộng

Định nghĩa. Cho hai ma trận cùng cỡ $m \times n$. $A = \left[a_{\text{ij}}\right]_{m\times n};\ B = \left[b_{\text{ij}}\right]_{m\times n}$

Tổng của hai ma trận A và B là ma trận $C = \left[c_{\text{ij}}\right]$ cỡ $m \times n$ trong đó:

$$c_{\text{ij}} = a_{\text{ij}} + b_{\text{ij}},\ \forall i = 1, 2...m;\ j = 1, 2...n.$$

Ký hiệu: C = A + B

Ví dụ 1.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Từ định nghĩa của phép toán cộng ma trận dễ dàng kiểm chứng các tính chất sau.

Tính chất. Cho A, B, C là các ma trận cỡ $m \times n$. Khi đó

$i) A+B=B+A$

$ii) A+0=0+A=A$

$iii) A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$

$iv)$ Nếu gọi $-A=\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$ thì $A+(-A)=(-A)+A=0$. Ma trận –A gọi là ma trận đối của A.

Định nghĩa. Nếu A, B là các ma trận cùng cỡ thì ta định nghĩa

$$A-B=A+(-B)$$

Phép nhân một số với ma trận

Định nghĩa. Cho $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$. Tích của k với A là ma trận cỡ $m\times n$ xác định bởi $k\mathrm{A}=\left[k\mathrm{a}_{ij}\right]_{m\times n}$.

Ví dụ 2.

$$3\begin{bmatrix}3 & 4\\ 7 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.3 & 3.4\\ 3.7 & 3.(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 12\\ 21 & -3\end{bmatrix}$$

Tính chất. Cho A, B là các ma trận cỡ $m\times n$ và $\alpha,\beta\in R$. Khi đó

$i) 1.A=A$

$ii) \left(\alpha\beta\right)A=\alpha\left(\beta A\right)$

$iii) \left(\alpha+\beta\right)A=\alpha A+\beta A$

$iv) \alpha\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B$

Phép nhân ma trận với ma trận

Định nghĩa. Cho $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times p}$; $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times n}$. Tích AB là ma trận $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ có m hàng n cột mà phần tử c_{ij} được tính bởi công thức

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

Chú ý. $a_{i1},a_{i2},...,a_{ip}$ là các phần tử ở hàng i của A và $b_{1j},b_{2j},...,b_{pj}$ là các phần tử ở cột j của B.

Ví dụ 3.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.1+2.3+3.1 & 1.2+2.2+3.4\\ 4.1+1.3+2.1 & 4.2+1.2+2.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 18\\ 9 & 18\end{bmatrix}$$

1.3.2. Định thức

Xét ma trận cấp n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ta chú ý đến phần tử a_{ij}, bỏ đi hàng i cột j ta thu được ma trận chỉ còn n -1 hàng, n – 1 cột, tức là ma trận cấp n -1. Ta ký hiệu nó là M_{ij} và gọi nó là ma trận con ứng với phần tử a_{ij}.

Định nghĩa. Định thức của ma trận A, ký hiệu là det(A), được định nghĩa dần dần như sau:

A là ma trận cấp một:

$$A = [a_{11}] \text{ thì } \det(A) = a_{11}$$

A là ma trận cấp hai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ thì } \det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

A là ma trận cấp n:

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det(M_{1n})$$

(chú ý rằng $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ là các phần tử cùng nằm ở hàng 1 của ma trận A).

Để ký hiệu định thức, người ta dùng hai gạch đứng đặt ở hai bên:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Định thức của ma trận cấp n gọi là định thức cấp n.

Ví dụ 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - (-1).3 = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 - 30 - 19 = -46$$

Tính chất của định thức

Tính chất 1. $\det(A^t) = \det(A)$.

Tính chất 2. Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) của một định thức ta được một định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.

Tính chất 3. Một định thức có hai hàng (hay hai cột) như nhau thì bằng không.

Tính chất 4. Khai triển của định thức theo hàng i:

$$\det(A) = (-1)^{i+1}[a_{i1}\det(M_{i1}) - a_{i2}\det(M_{i2}) + \dots \pm a_{in}\det(M_{in})]$$

Khai triển của định thức theo cột j:

$$\det(A) = (-1)^{1+j}[a_{1j}\det(M_{1j}) - a_{2j}\det(M_{2j}) + ... \pm a_{nj}\det(M_{nj})]$$

Ví dụ 5. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

Tính chất 5. Một định thức có một hàng (hay một cột) toàn là số không thì bằng không.
Tính chất 6. Khi nhân các phần tử của một hàng (hay một cột) với cùng một số k thì được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với k.
Hệ quả. Khi các phần tử của một hàng (hay một cột) có một thừa số chung, ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.
Tính chất 7. Một định thức có hai hàng (hay hai cột) tỉ lệ thì bằng không.
Tính chất 8. Khi tất cả các phần tử của một (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức.
Tính chất 9. Khi ta cộng bội k của mộ hàng vào mộ hàng khác (hay bội k của một cột vào một cột khác) thì được một định thức mới bằng định thức cũ.

1.3.3. Ma trận nghịch đảo, Hạng của ma trận.

Định nghĩa. Ma trận vuông A cấp n gọi là ma trận có nghịch đảo,hay gọi là khả nghịch, nếu tồn tại ma trận A' vuông cấp n sao cho: $A.A' = A'A = I_n$.

Xét ma trận

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}.............a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}.............a_{2n} \\ .... & \\ a_{n1} & a_{n2}............a_{nn} \end{bmatrix}$$

Gọi $D_{ij} = \det(M_{ij})$ là định thức con ứng với phần tử a_{ij}, và $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ là phần phụ đại số của phần tử a_{ij} .

Định lý. Nếu $\det(A) \neq 0$ thì ma trận A có nghịch đảo A^{-1} tính bởi công thức sau:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 6.Tìm ma trận nghịch đảo của

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Xét ma trận cỡ $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m.n} \end{bmatrix}$$

Gọi p là một số nguyên dương không lớn hơn $\min\{m,n\}$

Định nghĩa. Ma trận vuông cấp p suy từ A bằng cách bỏ đi m-p hàng và n-p cột gọi là ma trận con cấp p của A.

Định thức của ma trận con đó gọi là định thức con cấp p của A

Định nghĩa. Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A.

Ký hiệu: $r(A)$

Chú ý. Hạng của ma trận có dạng bậc thang bằng số hàng khác không của nó.

Ví dụ 7. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

1.3.4. Hệ phương trình tuyến tính.

Dạng tổng quát của một hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.4.1)$$

Trong đó $x_j,\ j = 1, 2, \dots, n$ là các ẩn số. a_{ij} là hệ số ở phương trình thứ i của ẩn x_j . b_i là vế phải của phương trình thứ i.

Khi $b_i = 0,\ \forall i$ ta có một hệ thuần nhất.

Quy tắc Cramer.

Xét hệ phương trình n phương trình n ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.4.3)$$

Với ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Định lý Cramer. Nếu ma trận A không suy biến thì hệ phương trình (1.4.3) có nghiệm duy nhất

$x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$ trong đó A là ma trận hệ số, A_j là ma trận suy từ ma trận A bằng cách thay cột thứ j bởi cột vế phải b.

Ví dụ 1.18. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Định lý Kronecker – Capelli. Hệ Ax = b, có nghiệm khi và chỉ khi $r(\overline{A}) = r(A)$.

Chú ý. Từ định lý ta suy ra:

$r(\overline{A}) \neq r(A)$ thì hệ vô nghiệm

$r(\overline{A}) = r(A) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

$r(\overline{A}) = r(A) < n$ thì hệ có vô số nghiệm.

1.3.5. Không gian Euclid

Định nghĩa. Một vecto n chiều là một hệ được sắp gồm n số thực

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

Xét $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\alpha \in R$

$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i = \overline{1,n}$

Phép cộng: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

Phép nhân số thực với vecto: $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$

Tính chất.

1) $x + y = y + x$

2) $x + y + z = (x + y) + z$

3) $x + 0 = x, x - x = 0;\ x + (-y) = x - y$ \

4) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Tập hợp tất cả các vecto n chiều trongđó xác định phép cộng các vecto , nhân một số thực với vecto thỏa mãn các tính chất trên, gọi là không gian tuyến tính n chiều. Ký hiệu R^n. Các vecto n chiều còn gọi là các điểm của không gian.

$x, y, z, ..., \in R^n$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu:

$\alpha x + \beta y + \gamma z + ... + ... = \theta \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = ... = 0$

Nếu $x = \alpha y + \beta z + ... + \rho v$ gọi là tổ hợp tuyến tính của $y, z, ...,$

Trong R^n có n vecto độc lập tuyến tính lập thành cơ sở của nó.
Không gian tuyến tính có đưa vào tích vô hướng gọi là không gian Euclid.

Chương 2. Quy hoạch tuyến tính

2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính

2.1.1. Bài toán tổng quát

Bài toán tổng quát của QHTT có dạng:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \quad (\min) \qquad (1.1)$$

$$D\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\,(\le,=,\ge)b_i,\ i=\overline{1,m} & (1.2)\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n} & (1.3)\end{cases}$$

Bài toán min: $f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$ (1.4)

$x\in D$ (1.5)

Giữ nguyên ràng buộc ta đưa nó về bài toán max.

$$\overline{f}(x)=-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (1.6)$$

$$x\in D \qquad (1.7)$$

Nếu bài toán max có phương án tối ưu x^* thì bài toán min cũng có phương án tối ưu là x^* và $f_{\min}=-\overline{f}_{\max}$

2.1.2. Dạng chuẩn và dạng chính tắc

Dạng chuẩn:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \ (\min) \qquad (1.9)$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le, b_i,\ i=\overline{1,m} & (1.10)\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n} & (1.11)\end{cases}$$

Dạng chính tắc:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \ (\min) \qquad (1.12)$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1,m} & (1.10)\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n} & (1.11)\end{cases}$$

Viết dưới dạng ma trận: $f(x)=\langle c,x\rangle \to \max$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Trong đó $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$ là một ma trận cấp $m \times n$. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$.

Ký hiệu: $A^j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})^T$ là vecto cột thứ j của ma trận A. Khi đó phương trình $Ax = b$ được viết dưới dạng: $x_1 A^1 + x_2 A^2 + ... + x_n A^n = b$.

2.1.3. Đưa QHTT về dạng chính tắc

Bất kỳ QHTT nào cũng có thể đưa về dạng chính tắc nhờ các quy tắc sau đây :

- Nếu gặp ràng buộc i có dạng ≤ thì người ta cộng thêm vào vế trái của ràng buộc một *biến phụ* xn+i ≥ 0 để được dấu = .

- Nếu gặp ràng buộc i có dạng ≥ thì người ta trừ vào vế trái của ràng buộc một *biến phụ* xn+i ≥ 0 để được dấu = .

Các biến phụ chỉ là những đại lượng giúp ta biến các ràng buộc dạng bất đẳng thức thành đẳng thức, nó phải không ảnh hưởng gì đến hàm mục tiêu nên không xuất hiện trong hàm mục tiêu.

- Nếu biến $x_j \leq 0$ thì ta đặt với $x_j = -x'_j$, $x_j' \geq 0$ rồi thay vào bài toán.

- Nếu biến x_j là tuỳ ý thì ta đặt

$$x_j = x_j' - x_j'' \text{ với } x_j', x_j'' \text{ đều} \geq 0:$$

rồi thay vào bài toán.

- Trong trường hợp trong số các ràng buộc có dòng mà vế phải của dòng đó là giá trị âm thì đổi dấu cả hai vế để được vế phải là một giá trị không âm.

Ví dụ. Biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây về dạng chính tắc :

$$\min \quad z(x) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 7 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -1 \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 10 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1, x_5 \geq 0 \\ x_4 \leq 0 \\ x_2, x_3 \text{ tùy ý} \end{cases} \end{cases}$$

2.1.4. Giải bài toán QHTT hai biến bằng phương pháp hình học

Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính

$f(x) = 4x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Hàm mục tiêu đạt giá trị max là 20 tại (5;0).

2.2.Một số tính chất chung

2.2.1. Tập hợp lồi

Định nghĩa1. Tập $L \subseteq R^n$ được gọi là tập lồi nếu $\forall x, y \in L \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in L, \forall \lambda; 0 \le \lambda \le 1$. Nói cách khác, tập L là tập lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm trong L nằm gọn trong L.

Ví dụ. Trong R^2, đoạn thẳng, đường thẳng, tia, toàn bộ R^2, nửa mặt phẳng, đa giác lồi, tam giác, hình tròn, elip đều là tập lồi.

Định nghĩa 2. Điểm x_0 được gọi là điểm cực biên của tập lồi L, nếu

$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2,\ x_1, x_2 \in L; 0 < \lambda < 1 \Rightarrow x_0 = x_1 = x_2$

Ví dụ. Trong R^2, đoạn thẳng thì hai đầu mút là các điểm cực biên. Hình tam giác thì các đỉnh là các điểm cực biên.

2.2.2. Tính chất của bài toán Quy hoạch tuyến tính

Định lý 1. Tập hợp các phương án của bài toán Quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.

Định lý 2. Tập hợp các phương án tối ưu của bài toán Quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.

2.2.3. Tính chất của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \min$$

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n = b$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}$$

Định nghĩa 3. Giả sử $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ là một phương án của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc. Khi đó $x_{10} A^1 + x_{20} A^2 + \ldots + x_{n0} A^n = b$ ứng với những $x_{j0} > 0$, hệ $\{\ A^j\ \}$ được gọi là hệ vecto liên kết với x^0.

Ví dụ. Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính có tập phương án là

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Ta có: $x^0 = (\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ là một phương án của bài toán với hệ vecto liên kết A^1, A^2.

Định lý 3. Giả sử $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ là một phương án khác không của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc. Khi đó nếu x^0 là phương án cực biên của tập phương án thì hệ vecto liên kết với nó độc lập tuyến tính. Ngược lại, nếu x^0 là một phương án có hệ vecto liên kết độc lập tuyến tính thì x^0 là một phương án cực biên.

Hệ quả 1. Số phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là hữu hạn.

Định nghĩa 4. Một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc được gọi là không suy biến nếu số thành phần dương của nó bằng m. Nếu số thành phần dương ít hơn m thì phương án cực biên này gọi là suy biến.

Ví dụ. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính có tập phương án là

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

$x^0 = (0,5,5)$ là phương án cực biên không suy biến. $x^1 = (5,0,0)$ là phương án cực biên suy biến.

Hệ quả 2. Số thành phần dương của một phương án cực biên tối đa bằng m(số dòng của ma trận A).

Định lý 4. Nếu bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có tập phương án khác rỗng thì nó có ít nhất một phương án cực biên.

Ví dụ. Tìm tất cả các phương án cực biên của tập phương án của bài toán

$$f(x) = 2x_1 + x_3 + 5x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 5 \\ \quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Định lý 5. Nếu bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì nó có ít nhất một phương án cực biên là tối ưu.

Định lý 6. Điều kiện cần và đủ để bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu là tập phương án không rỗng và hàm mục tiêu bị chặn dưới (nếu là bài toán min) hoặc bị chặn trên(nếu là bài toán max) .

Ví dụ. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 2x_1 + x_3 + 5x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 5 \\ \quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

2.3.Phương pháp đơn hình giải QHTT

2.3.1. Đường lối chung và cơ sở thuật toán

Phương pháp đơn hình dựa trên nhận xét sau:

-Nếu bài toán QHTT có phương án tối ưu thì có ít nhất một phương án cực biên là tối ưu.

- Số phương án cực biên là hữu hạn.

Như vậy phải tồn tại một thuật toán hữu hạn. Thuật toán gồm 2 giai đoạn:

Giai đoạn 1. Tìm một phương án cực biên ban đầu.

Giai đoạn 2. Kiểm tra điều kiện tối ưu của phương án đó.
- Nếu điều kiện tối ưu thỏa mãn thì phương án đó là phương án tối ưu. Nếu không ta chuyển sang một phương án cực biên mới tốt hơn phương án ban đầu.
- Kiểm tra điều kiện tối ưu của phương án mới.

2.3.2. Cơ sở của thuật toán

Xét bài toán dạng chính tắc

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \min$$
$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + ... + x_n A^n = b$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$$

Giả sử bài toán đang xét đã biết một phương án cực biên $x^0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0, ..., 0)$, trong đó $x_{j0} \ge 0,\ j = \overline{1,m}$. Cơ sở liên kết của x^0 là $A^1, A^2, ..., A^m$.

Với mỗi $j = \overline{1,n}$, ta có $A^j = x_{1j} A^1 + x_{2j} A^2 + ... + x_{mj} A^m$ (tính chất của cơ sở)

Ký hiệu: $x^j = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{mj})$, với $j = \overline{1,m}$ thì x^j là vecto đơn vị thứ j.

Đặt $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} = \langle c, x^j \rangle,\ j = \overline{1,n}$.

$\Delta_j = z_j - c_j$ gọi là ước lượng của vecto A^j ứng với phương án cực biên x^0.

Chú ý. $\Delta_j = 0$, $j = \overline{1,m}$.

Định lý 1. (Dấu hiệu tối ưu)

Nếu $x = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0, ..., 0)$ là một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc sao cho $\Delta_j \le 0, \forall j = \overline{1,n}$ thì x là phương án tối ưu.

Định lý 2. Nếu tồn tại vecto A^j ngoài cơ sở liên kết của phương án cực biên $x = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0, ..., 0)$ sao cho $\Delta_j > 0$ và $x^j \le 0$ thì bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc không có phương án tối ưu.

Ví dụ. Xét bài toán $f(x) = x_1 + 6x_2 + 9x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 = 6 \\ \quad x_2 + x_3 \ = 8 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Xét xem phương án cực biên $x = (6,8,0)$ có phải là phương án tối ưu không?

Ví dụ 2. Xét bài toán $f(x) = 7x_1 - 26x_2 + 9x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad = 5 \\ \quad - x_2 + x_3 \ = 7 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Xét xem phương án cực biên $x = (5,0,7)$ có phải là phương án tối ưu không?

Định lý 3. Nếu tồn tại vecto A^j ngoài cơ sở liên kết của phương án cực biên $x = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0, ..., 0)$ sao cho $\Delta_j > 0$ và với mỗi j mà $\Delta_j > 0$ ta luôn tìm được ít nhất một $x_{ij} > 0$ thì khi đó ta có thể tìm được một phương án cực biên mới tốt hơn x, nghĩa là phương án này làm hàm mục tiêu nhỏ hơn phương án x.

Xây dựng phương án mới:

Từ cơ sở cũ, đưa vecto A^k ứng với $\Delta_k > 0$ vào thay cho vecto A^s. Chỉ số k và s được xác định: $\Delta_k = \max \Delta_j, \Delta_j > 0$, $\theta = \min\left\{\frac{x_{i0}}{x_{ik}} : x_{ik} > 0\right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sk}}$, ta được cơ sở mới là cơ sở liên kết của phương án cực biên x'.

Phương án mới

$$x' = (x_{10} - \theta x_{1k}, x_{20} - \theta x_{2k}, ..., x_{s-10} - \theta x_{s-1k}, 0, x_{s+10} - \theta x_{s+1k}, ..., x_{m0} - \theta x_{mk}, 0, ..., 0)$$

Ví dụ. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính $f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad + 4x_4 = 6 \\ \quad 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

2.3.3. Thuật toán đơn hình cho bài toán chính tắc có sẵn ma trận đơn vị

Giả sử bài toán chính tắc $f(x) = \langle c, x\rangle \to \min$

$$x_1A^1 + x_2A^2 + ... + x_nA^n = b$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}$$

Có chứa một ma trận đơn vị gồm m vecto đầu tiên là $A^1, A^2, ..., A^m$ và phương án cực biên trong bước lặp đầu tiên là $x = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0) \ge 0$. Bảng đơn hình

			c_1	c_2	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
Cơ sở	Hệ số c_j	Ph.án	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
A^1	c_1	b_1	1	0		0	x_{1m+1}		x_{1k}		x_{1n}
A^2	c_2	b_2	0	1		0	x_{2m+1}		x_{2k}		x_{2n}
.	.	.	.	.		.	.		.		.
.	.	.	.	.		.					
.	.	.	.	.		.					
A^s	c_s	b_s	0	0		0	x_{sm+1}		x_{sk}		x_{sn}
.											
.											
.											
A^m	c_m	b_m	0	0		1	x_{mm+1}		x_{mk}		x_{mn}
	$f(x)$	f_0	0	0		0	Δ_{m+1}		Δ_k		Δ_n

Bước 1. - Nếu $\Delta_j \le 0, \forall j = \overline{1,n}$ thì phương án đang xét là phương án tối ưu. Thuật toán kết thúc.

- Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ mà ứng với j này , $x_{ij} < 0, \forall i = \overline{1,m}$ thì bài toán không có phương án tối ưu. Thuật toán kết thúc.

- Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ mà ứng với j này, tồn tại $x_{ij} > 0$ ta sẽ tìm được một phương án cực biên khác tốt hơn phương án đang xét.

Bước 2. – Xác định $\Delta_k = \max\{\ \Delta_j : \Delta_j > 0\ \}$, vecto A^k đưa vào thay thế

- Xác định vecto A^s đưa ra khỏi cơ sở như sau:

Lập tỉ số giữa cột phương án và các phần tử dương tương ứng ở cột x^k để chỉ ra tỷ số nhỏ nhất $\theta = \min\left\{\frac{x_{i0}}{x_{ik}} : x_{ik} > 0\right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sk}}$.

Cột k được gọi là cột xoay, dòng s được gọi là dòng xoay, phần tử x_{sk} được gọi là phần tử trục.

Bước 3. Lập bảng đơn hình mới.

- Chia mỗi phần tử ở dòng xoay cho phần tử trục kết quả thu được gọi là dòng chính
- Lấy mỗi dòng khác trừ đi tích của dòng chính nhân với phần tử xoay tương ứng

Bước 4. Quay lại bước 1.

Ví dụ. Giải bài toán $f(x) = -5x_1 - 4x_2 + 2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 + x_5 = 10 \\ x_2 + x_4 + 3x_5 = 12 \\ x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 15 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

			-5	-4	0	0	2
Cơ sở	Hệ số c_j	Ph.án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A^1	-5	10	1	0	0	2	1
A^2	-4	12	0	1	0	1	3
A^3	0	15	0	0	1	3	1
	$f(x)$	-98	0	0	0	-14	-19

Phương án tối ưu là $x = (10,12,15,0,0)$, giá trị tối ưu -98.

Ví dụ. Giải bài toán

$$f(x) = -2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}$$

			-2	-4	1	-1	0	0
Cơ	Hệ số	Ph.án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

sở	c_j							
A^5	0	4	1	3	0	0	1	0
A^6	0	3	2	1	-1	0	0	1
A^4	-1	3	0	1	4	1	0	0
	$f(x)$	-3	2	3	-5	0	0	0
A^2	-4	$4/3$	$1/3$	1	0	0	$1/3$	0
A^6	0	$5/3$	$5/3$	0	-1	0	$-1/3$	1
A^4	-1	$5/3$	$-1/3$	0	4	1	$-1/3$	0
	$f(x)$	-7	1	0	-5	0	-1	0
A^2	-4	1	0	1	$1/5$	0	$2/5$	$-1/5$
A^1	-2	1	1	0	$-3/5$	0	$-1/5$	$3/5$
A^4	-1	2	0	0	$19/5$	1	$-2/5$	$1/5$
	$f(x)$	-8	0	0	$-22/5$	0	$-4/5$	$-3/5$

Phương án tối ưu là $x = (1,1,0,2,0,0)$ và giá trị tối ưu là -8.

2.3.4. Thuật toán đơn hình cho bài toán chính tắc không có sẵn ma trận đơn vị

Giả sử bài toán chính tắc

$$\begin{aligned} & f(x) = \langle c, x \rangle \to \min \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

trong đó A không có ma trận dơn vị.

Phương pháp đánh thuế:

Ta thêm các ẩn giả $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ (giả sử bài toán còn thiếu m vecto đơn vị). Khi đó bài toán có dạng sau: $f(x) + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + ... + Mx_{n+m} \to \min$

$$\begin{aligned} & Bx = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (M)$$

Trong đó B là ma trận cấp $m \times (m+n)$ với n cột đầu là ma trận A, m cột sau là m vecto đơn vị. x là vecto có n+m thành phần. M là số dương rất lớn.

Định lý. Nếu bài toán (*) có phương án tối ưu $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ thì bài tón M có phương án tối ưu $x = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, ..., 0)$ và ngược lại.

Quy ước: $\Delta_j = \delta_j M + \gamma_j > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \delta_j > 0, \forall \gamma_j \\ \delta_j = 0, \gamma_j > 0 \end{array}\right.$

$$\Delta_j = \delta_j M + \gamma_j < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \delta_j < 0, \forall \gamma_j \\ \delta_j = 0, \gamma_j < 0 \end{array}\right.$$

$$\Delta_k = \delta_k M + \gamma_k > \Delta_j = \delta_j M + \gamma_j \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \delta_k > \delta_j 0, \forall \gamma_j \\ \delta_j = \delta_k, \gamma_k > \gamma_j \end{array}\right.$$

Ví dụ. Giải bài toán $f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \quad + 2x_3 - x_4 \ = 2 \\ 2x_1 + x_2 \ - 3x_3 \ + x_4 \ = 6 \\ x_1 \ + x_2 + x_3 \quad + x_4 \ = 7 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Ví dụ. Giả thiết rằng ở một xí nghiệp sản xuất 2 loại sản phẩm A và B. Để đơn giản ta giả thiết rằng trong quy trình sản xuất sản phẩm A, chi phí bao gồm sức lao động còn để sản xuất sản phẩm B thì vừa tốn sức lao động vừa tốn tư liệu sản xuất (chính là sản phẩm A) . Biết rằng để sản xuất một đơn vị sản phẩm B thì tốn 0,4 đơn vị lao động và 0,1 đơn vị sản phẩm A. Dữ trữ lao động tổng cộng có 100 đơn vị. Cần làm cực đại số sản phẩm cuối cùng của xí nghiệp với điều kiện là sản phẩm cần được sản xuất đồng bộ với tỷ lệ 3:1(tức là sản phẩm A và ¼ sản phẩm B).

2.4.Quy hoạch đối ngẫu

2.4.1. Bài toán đối ngẫu

Định nghĩa. Cho bài toán QHTT, ta gọi là bài toán (P)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \langle c, x \rangle \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ \ (i \in I_1) \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ \ (i \in I_1) \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i \in I_1) \qquad (3)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j \in J_1) \qquad (4)$$

$$x_j \leq 0 \quad (j \in J_2) \qquad (5)$$

$$x_j \in \mathbb{R} \quad (j \in J_3) \qquad (6)$$

Bài toán gọi là (Q) sau đây được gọi là bài toán đối ngẫu của bài toán (P)

$$g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \langle b, y \rangle \to max$$

$$y_i \leq 0 \quad (i \in I_1) \qquad (1')$$

$$y_i \geq 0 \quad (i \in I_2) \qquad (2')$$

$$y_i \in \mathbb{R} \quad (i \in I_3) \qquad (3')$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \ \ (j \in J_1) \qquad (4')$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \ \ (j \in J_2) \qquad (5')$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad (j \in J_3) \qquad (6')$$

Trong đó các cặp ràng buộc $(1)-(1'),\ (2)-(2')...$ được gọi là các ràng buộc đối ngẫu với nhau.

Ví dụ. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau:

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 \qquad\qquad -3x_5 \le 5 \\ x_1 \qquad - x_3 - 4x_4 - 5x_5 \le -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \qquad \ge 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 \qquad = 17 \\ x_1; x_3 \ge 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_4; x_5 \le 0 \end{cases}$$

Tương tự cặp bài toán sau đây được gọi là cặp bài toán đối ngẫu.

Bài toán (P):

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \langle c, x \rangle \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i \in I_1) \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad (i \in I_1) \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I_1) \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j \in J_1) \qquad (4)$$

$$x_j \le 0 \quad (j \in J_2) \qquad (5)$$

$$x_j \in \mathbb{R} \quad (j \in J_3) \qquad (6)$$

Bài toán (Q):

$$g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \langle b, y \rangle \to \min$$

$$y_i \ge 0 \quad (i \in I_1) \qquad (1')$$

$$y_i \le 0 \quad (i \in I_2) \qquad (2')$$

$$y_i \in \mathbb{R} \quad (i \in I_3) \qquad (3')$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j \in J_1) \qquad (4')$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \quad (j \in J_2) \qquad (5')$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad (j \in J_3) \qquad (6')$$

2.4.2. Mối quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu

Định lý 1. Nếu cả hai bài toán gốc và đối ngẫu đều có tập phương án không rỗng thì cả hai bài toán đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của các hàm mục tiêu là bằng nhau.

Định lý 2. (Định lý độ lệch bù) Các phương án $\overline{x}, \overline{y}$ của bài toán gốc và đối ngẫu đều là phương án tối ưu điều kiện cần và đủ là $\left\langle b - A\overline{x}, \overline{y} \right\rangle = \left\langle c - \overline{y}A, \overline{x} \right\rangle = 0$ hoặc tương đương

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \left(c_j - \left\langle A^j, \overline{y} \right\rangle \right) \overline{x_j} = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \left(b_i - \left\langle A_i, \overline{x} \right\rangle \right) \overline{y_i} = 0 \end{cases}$$

Trong đó A_i, A^j theo thứ tự là vecto dòng thứ i và cột thứ j của ma trận A. Hệ cuối cùng có thể viết rõ hơn như sau:

$$\begin{cases} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{\text{ij}} \overline{x_j} \right) y_i = 0 & i = \overline{1, m} \\ \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{\text{ij}} \overline{y_i} \right) x_j = 0 & j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Ví dụ. Bài toán QHTT

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad + 4x_4 = 6 \\ \qquad 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1, 4} \end{cases}$$

Có phương án tối ưu là $x = (2, 4, 0, 0)$ và giá trị tối ưu là -6. Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Chú ý. Qua việc giải một số hệ phương trình trên ta thấy rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{\text{ij}} \overline{x_j} \right) y_i = 0 & i = \overline{1, m} \\ \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{\text{ij}} \overline{y_i} \right) x_j = 0 & j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Nếu có một thừa số khác không thì thừa số còn lại phải bằng không.

Định lý 3. Cho bài toán gốc dạng chính tắc (P). Bài toán gốc (P) đã giải bằng phương pháp đơn hình và đã xuất hiện dấu hiệu tối ưu. Phương án tối ưu $\overline{x}$ tìm được có cơ sở liên kết gồm m vecto $A^1, A^2, ..., A^m$ (m vecto này xuất phát từ ma trận A hay trong bảng đơn hình đầu) . Khi đó phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu $\overline{y}$ được tím theo công thức $\overline{y} = cB^{-1}$, trong đó c là vecto có các thành phần c_j tương ứng của phương án tối ưu $\overline{x}$, B là ma trận có các cột là các vecto $A^1, A^2, ..., A^m$.

Ví dụ. Cho bài toán QHTT (P)

$$f(x) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \to max$$

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 + x_4 \le 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad = 25 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 16 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Giải bài toán (P) bằng phương pháp đơn hình, tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Đinh lý 4. Giả sử $A^{j_1}, A^{j_2}, ..., A^{j_m}$ là cơ sở đơn vị liên kết của phương án cực biên xuất phát của bài toán gốc dạng chính tắc. Khi đó phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu có thể tính theo công thức: $\overline{y} = \left(\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j2}, ..., \Delta_{j_m} + c_{jm}\right)$, trong đó $\Delta_{j_1}, \Delta_{j_2}, \Delta_{j_m}$ lag các ước lượng tương ứng với các cột $A^{j_1}, A^{j_2}, ..., A^{j_m}$ xuất hiện ở bảng đơn hình cuối cùng khi đã có dấu hiệu tối ưu và $c_{j_1}, c_{j_2}, c_{j_m}$ là các hệ số của $x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_m}$.

2.4.3. Thuật toán đơn hình đối ngẫu

Xét bài toán gốc dạng chính tắc và bài toán đối ngẫu của nó

$$\begin{aligned} & f(x) = \langle c, x \rangle \to \min \\ & Ax = b \qquad\qquad (P) \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & g(y) = \langle b, y \rangle \to max \\ & yA \le c \qquad\qquad (Q) \\ & y \in \square \end{aligned}$$

Định nghĩa. Giả sử hệ vectơ $A^1, A^2, ..., A^m$ độc lập tuyến tính. Khi đó nếu có phương án $\overline{y}$ của bài toán đối ngẫu thỏa $\left\langle A^j, \overline{y} \right\rangle = c_j, j = \overline{1,m}$ thì hệ $A^1, A^2, ..., A^m$ được gọi là cơ sở đối ngẫu chấp nhận được.

Định nghĩa. Với phương án cực biên $\overline{y}$ nói ở định nghĩa 1, ta gọi vectơ $\overline{x} = \left(x^0, 0\right)$ trong đó $x^0 = B^{-1}b$ là giả phương án của bài toán gốc.

Định lý. Nếu $x^0 = B^{-1}b = \left(x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}\right) \ge 0$ thì $\overline{y}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu và $\overline{x} = \left(x^0, 0\right)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc.

Thuật toán đơn hình đối ngẫu.

Ta giả sử bài toán dạng chính tắc gốc có sẵn một cơ sở đơn vị là cơ sở đối ngẫu chấp nhận được. Lập bảng đơn hình như bảng đơn hình gốc. Thuật toán đơn hình đối ngẫu được thực hiện qua một số bước sau.

1) Sau khi đã lập bảng đơn hình ta tính $\Delta_j = \langle c^0, x^j \rangle - c_j,\ j = \overline{1,m}$ và $\langle c^0, x^0 \rangle$. Ký hiệu $x^j = A^j$
2) Nếu $x^0 \geq 0$ thì $\overline{x} = (x^0, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc và dẫn đến $\overline{y} = cB^{-1}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.
Nếu tồn tại chỉ số i sao cho $x_{i0} < 0,\ x_{ij} \geq 0,\ j = \overline{1,n}$ thì bài toán đối ngẫu không bị chặn trên, khi đó bài toán gốc có tập phương án bằng rỗng. Kết thúc thuật toán.
3) Ngược lại với bước 2 chọn $x_{s0} = \min\left\{x_{i0} < 0 : i = \overline{1,m}\right\}, A^s$ bị loại ra khỏi cơ sở.
Chọn $\theta = \min\left\{\frac{\Delta_j}{x_{sj}} : x_{sj} < 0; j = \overline{1,n}\right\} = \frac{\Delta_k}{x_{sk}}$, vecto A^k được đưa vào thay cho A^s
4) Biến đổi bảng đơn hình. Biến đổi cột k thành vecto đơn vị như A^s
5) Kiểm tra tính tối ưu của giả phương án mới như bước 2.

Ví dụ. Dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu giải bài toán

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 6 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 9 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

2.4.4. Ý nghĩa của cặp bài toán đối ngẫu

- Khi giải bài toán dạng $f(x) = \langle c, x \rangle \to \min$

$$\text{Ax} = b; x \geq 0$$

Trong đó $c_j > 0, \forall j$ thì giải bài toán đối ngẫu đơn giản hơn

- - Giả sử đã giải xong bài toán $f(x) = \langle c, x \rangle \to \min$

$$\text{Ax} = b; x \geq 0$$

- Bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu và thu được phương án tối ưu $\overline{x} = (x^0, 0)$ $= (x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0, ..., 0)$. Khi đó nếu cần phải giải bài toán $f(x) = \langle c, x \rangle \to \min$ $\text{Ax} = b'; x \geq 0$ thì không cần giải từ đầu mà chỉ cần tính $\overline{x_0} = B^{-1}b'$ trong đó B là ma trận có các cột là các vecto lập thành từ cơ sở đối ngẫu chấp nhận được ở bảng đơn hình cuối cùng.

Ví dụ. Giải bài toán $f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = -6 \\ -4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = -9 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Từ đó tìm phương án tối ưu của bài toán $f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = -7 \\ -4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = -12 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Chương 3. Bài toán vận tải

3. 1. Phát biểu bài toán- Sự tồn tại nghiệm tối ưu

3.1.1. Phát biểu bài toán

Có m địa điểm $A_1, A_2, ..., A_m$ cùng sản xuất một loại hàng hóa với các lượng hàng tương ứng là $a_1, a_2, ..., a_m$. Có n nơi tiêu thụ loại hàng đó $B_1, B_2, ..., B_n$ với các yêu cầu tương ứng là $b_1, b_2, ..., b_n$. Gọi

A_i là điểm phát i, $i = \overline{1,m}$

Hàng có thể chở từ một điểm phát bất kì i đến một điểm thu bất kỳ j.

Ký hiệu: c_{ij} - chi phí chuyên chở một đơn vị hàng từ điểm phát i đến điểm thu j.

x_{ij} - lượng hàng chuyên chở từ điểm phát i đến điểm thu j.

Bài toán: Xác định những đại lượng x_{ij} cho mọi con đường (i, j) sao cho tổng chi phí chuyên chở là nhỏ nhất với giả thiết là: Mỗi điểm phát i thì phát hết hàng hóa, mỗi điểm thu j thì thỏa mãn nhu cầu với điều kiện sau: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Dạng toán học của bài toán vận tải là:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \\ a_i, b_j > 0; \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \end{cases}$$

3.1.2. Sự tồn tại nghiệm tối ưu

Định lý. Bài toán vận tải có điều kiện cân bằng thu phát thì có phương án tối ưu.

3.2. Dạng bảng của bài toán vận tải và điều kiện tối ưu

3.2.1. Dạng bảng của bài toán vận tải

Bài toán vận tải có thể cho dưới dạng bảng sau đây

Thu / Phát	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
a_1	x		x			c_{1n}
a_2						c_{2n}
...	x		x			

a_i						c_{in}
...						
a_m						c_{mn}

Nếu các ô (i, j) ta ghi cước phí thì gọi là bảng cước phí hay ma trận cước phí. Nếu các ô (i, j) ta lượng hàng vận chuyển thì gọi là bảng phương án hay ma trận phương án.

Đinh nghĩa. Ta gọi một đường đi là tập hợp các ô của bảng sao cho cứ hai ô liên tiếp thì nằm trên cùng một dòng hay một cột; và một dòng hay một cột không chứa quá hai ô. Một đường đi khép kín được gọi là một chu trình.

Định lý. Tập hợp các ô nào đó trong bảng vận tải không chứa chu trình khi và chỉ khi hệ vecto liên kết với nó độc lập tuyến tính.

Hệ quả. Một bảng vận tải có m dòng, n cột thì tập ô không chứa chu trình có tối đa là m+n-1 ô.

Định lý 2. Một bảng vận tải có m dòng n cột. Cho E là tập gồm m+n-1 ô không chứa chu trình, ô $(i, j) \in E$. Khi đó tập hợp $F = \{ \ (i, j) \ \} \cup E$ có chứa duy nhất một chu trình qua ô (i, j).

Định lý 3. Một bảng vận tải có m dòng, n cột. Nếu tập F gồm m+n ô có chứa duy nhất một chu trình qua ô (i, j). Khi đó nếu ta loại ô (i, j) này ra khỏi tập F thì các ô còm lại sẽ không chứa chu trình.

Đinh nghĩa. Giả sử $x = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn})$ là một phương án của bài toán vận tải. Khi đó nếu $x_{ij} > 0$ thì ta nói ô (i, j) là ô chọn. Ngược lại ta gọi là ô loại.

Định lý 4. Phương án $x = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn})$ là một phương án cực biên của bài toán vận tải khi và chỉ khi tập các ô chọn tương ứng với nó không chứa chu trình.

Ví dụ. Xét bài toán vận tải cho bởi bảng sau

	30	40	50	60
80	1 30	5	7	2 50
45	5	7	4 35	9 10
55	12	2 40	3 15	6

Khi đó $x = (30, 0, 0, 50, 0, 0, 35, 10, 0, 40, 15, 0)$ là một phương án . Biểu diễn phương án này trên bảng vận tải

	30	40	50	60

80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Hệ véctơ tương ứng với nó là $A^{11}, A^{14}, A^{23}, A^{24}, A^{32}, A^{33}$. Hệ véctơ này độc lập tuyến tính. Suy ra phương án x là phương án cực biên. Các ô chọn là các ô đánh dấu x không chứa chu trình.

x			x
		x	x
	x	x	

3.2.2. Điều kiện tối ưu của một phương án cực biên

Giả sử có sẵn một phương án cực biên $x = (x_{ij}), i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}$ và phương án này có n+m-1 thành phần dương. Kí hiệu $E = \{(i, j): x_{ij} > 0\}$ là tập hợp các ô chọn.
$F = E \cup \{(i, j)\}$ chứa duy nhất một chu trình V qua ô (i, j). Bắt đầu từ ô (i, j) ta đánh số thứ tự các ô thuộc V.

Định lý. Ký hiệu V^L, V^C lần lượt là tập hợp các ô thuộc V có số thứ tự lẻ và số thứ tự chẵn. Khi đó $\Delta_{ij} = \sum_{(i,j)\in V^C} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in V^L} c_{ij}$, trong đó c_{ij} là cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hoá từ kho i đến nơi nhận j.

Ví dụ. Xét lại ví dụ trên và phương án cực biên đã biết

	30	40	50	60
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Tính Δ_{12}. Bổ sung ô (1, 2) vào các ô chọn ta có duy nhất một chu trình. Đánh số thứ tự 1,2,3,4,5,6 các ô trong chu trình này
$V^L = \{(1,2); (2,4); (3,3)\}$, $V^C = \{(1,4);\ (2,3);\ (3,2)\}$

$$\Delta_{12} = \sum_{(i,j)\in V^C} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in V^L} c_{ij} = (c_{14} + c_{23} + c_{32}) - (c_{12} + c_{24} + c_{33}) = -9$$

Định lý. Cho bài toán vận tải có ma trận cước phí $c = (c_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$. Nếu ta thay ma trận cước phí này bằng ma trận cước phí $c' = (c'_{ij})$, $c'_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j$, (lượng hàng ở kho thu phát vẫn giữ nguyên) thì hai bài toán vận tải này có cùng phương án tối ưu.

Phương pháp quy không cước phí ô chọn. Cộng vào dòng i số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0. Khi đó $\Delta_{ij} = -c'_{ij}$.

Ví dụ. Xét lại ví dụ trên và phương án cực biên đã biết

	30	40	50	60
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Các ô chọn là các ô đánh dấu x.

1 **x**	5	7	2 **x**
5	7	4 **x**	9 x
12	2 **x**	3 **x**	6

Ta cộng vào dòng i số số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0

1 **x**	5	7	2 **x**	r_1 =0
5	7	4 **x**	9 x	r_2 =-7
12	2 **x**	3 **x**	6	r_3 =-6
s_1 =-1	s_2 =4	s_3=3	s_4 =-2	

Ma trận cước phí mới là

0 **x**	9	10	0 **x**
-3	4	0 **x**	0 x
5	0 **x**	0 **x**	-2

Khi đó các $\Delta_{ij} = -c'_{ij}$ trong đó c'_{ij} ở bảng trên

Định lý. Giả sử $x = (x_{ij})$ là một phương án cực biên của bài toán vận tải với tập các ô chọn là E, và $c'_{ij} = 0, \forall (i,j) \in E$ (nghĩa là sau khi đã quy không cước phí các ô chọn). Ta có

a) Nếu $c'_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \notin E$ thì phương án đã cho là phương án tối ưu.
b) Nếu tồn tại $(i,j) \notin E\ : c'_{ij} < 0$ thì ta có thể tìm được một phương án mới $x' = (x'_{ij})$ tốt hơn phương án $x = (x_{ij})$. Phương án cực biên $x' = (x'_{ij})$ được xây dựng như sau:

- Tìm một ô $(i,j) \notin E$ sao cho cước phí $c'_{ij} < 0$ nhỏ nhất.
- Tập các ô $F = E \cup \{(i,j)\}$ có chứa một chu trình V duy nhất qua ô (i,j). Đánh số thứ tự các ô thuộc V, bắt đầu từ ô (i,j) theo một chiều nào đó. Kí hiệu V^L, V^C lần lượt là tập hợp các ô thuộc V có số thứ tự lẻ và số thứ tự chẵn.
- Đặt $x_{i^*j^*} = min\{(x_{ij}: (i,j) \in V^C\}$. Gọi $x_{i^*j^*}$ là lượng hàng điều chỉnh.
- $x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + x_{i^*j^*} & với\ (i,j) \in V^L \\ x_{ij} - x_{i^*j^*} & với\ (i,j) \in V^C \\ x_{ij} & với\ (i,j) \notin V \end{cases}$

.

3.3. Thuật toán quy không cước phí ô chọn

Bước 1. Thành lập một phương án ban đầu , số ô chọn là m+n-1

Bước 2. Quy không cước phí ô chọn. Nếu các ô loại có cước phí không âm thì phương án đang xét là phương án tối ưu. Kết thúc thuật toán. Ngược lại có ô loại có cước phí âm thì ta qua bước 3.

Bước 3. Xây dựng phương án mới.

Bước 4. Quay về bước 2

Cách thành lập phương án ban đầu. (phương án cực tiểu) Phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí nhỏ nhất. Khi đó sẽ xảy ra hai trường hợp sau:

- Nơi nhận nào đã đủ hàng thì ta xoá cột có nơi nhận đó đi và ghi nhận lượng hàng thừa ở nơi phát.
- Nơi nào phát đủ hết hàng thì ta xoá dòng có nơi phát đó đi và ghi nhớ lượng hàng thiếu ở nơi nhận.

Ví dụ. Giải bài toán vận tải cho bởi bảng vận tải sau

	30	40	50	60
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Giải.

Bước 1. Thành lập một phương án ban đầu. Phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí nhỏ nhất ta được phương án ban đầu

	30	40	50	60
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Bước 2. Quy không cước phí các ô chọn.

Ta cộng vào dòng i số số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0.

1 **x**	5	7	2 **x**	$r_1 = 0$
5	7	4 **x**	9 **x**	$r_2 = -7$
12	2 **x**	3 **x**	6	$r_3 = -6$
$s_1 = -1$	s_2 =4	$s_3 = 3$	$s_4 = -2$	

Ma trận cước phí của bài toán mới là

0 **x**	9	10	0 **x**
-3	4	0 **x**	0 **x**
5	0 **x**	0 **x**	-2

Chứng tỏ phương án này chưa tối ưu., vì còn có ô cước phí âm
Bước 3. Xây dựng phương án mới
Bổ sung ô (2,1) có cước phí âm nhỏ nhất vào tập hợp các ô chọn E, ta được một chu trình V duy nhất (2,1); (2,4); (1,4); (1,1). $V^L = (2,1); (1,4)$; $V^C = (1,1); (2,4)$
Lượng hàng ở các ô lẻ là $x_{21} = 0;\ x_{14} = 50$.
Lượng hàng các ô chẵn là $x_{11} = 30;\ x_{24} = 10$
Lượng hàng điều chỉnh $x_{i^*j^*} = min\{(x_{ij}: (i,j) \in V^C\}$=$min\{10,30\} = 10$
Ta có phương án mới

1 **20**	5	7	2 **60**
5 **10**	7	4 **35**	9

12	2 **40**	3 **15**	6

Bước 4. Xem đây là một phương án ban đầu, ta quay lại bước 2, quy không cước phí các ô chọn.
Các ô chọn là các ô có đánh dấu x.

1 **x**	5	7	2 **x**
5 **x**	7	4 **x**	9
12	2 **x**	3 **x**	6

Ta cộng vào dòng i số số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0.

1 **x**	5	7	2 **x**	$r_1 = 0$
5 **x**	7	4 **x**	9	$r_2 = -4$
12	2 **x**	3 **x**	6	$r_3 = -3$
$s_1 = -1$	$s_2 = 1$	$s_3 = 0$	$s_4 = -2$	

Ma trận cước phí của bài toán mới là

0 **x**	6	7	0 **x**
0 **x**	4	0 **x**	3
8	0 **x**	0 **x**	1

Tất cả các ô đều có cước phí không âm. Vậy phương án tối ưu là $x = (20,0,0,60,10,0,35,0,0,40,15,0)$. Cước phí phải trả là $f = 1.20 + 2.60 + 5.10 + 4.35 + 2.40 + 3.15 = 455$.