NGUYỄN QUỐC TIẾN

BÀI GIẢNG

TOÁN CAO CẤP 2

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH 11 – 2012

CHƯƠNG1 HÀM NHIỀU BIẾN

1.1 Hàm nhiều biến

1.1.1 Các định nghĩa

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.1** Một qui luật f đặt tương ứng mỗi cặp số thực $(x, y) \in D \times D, D \subset R$ với một và chỉ một phần tử $z \in R$ thì ta nói f là hàm hai biến số trên $D \times D$. Ký hiệu $f: D \times D \to R$ hay $z = f(x, y)$.

Đối với hàm ba biến thì ta có định nghĩa tương tự, khi đó ta có: $u = f(x, y, z)$. Chẳng hạn $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, $u = x + y^2 - z$, ...

Định nghĩa **Error! No text of specified style in document.**.2 Tập hợp các cặp (x, y) mà ứng với chúng có thể xác định được giá trị của *z* được gọi là miền xác định của hàm hai biến $z = f(x, y)$, ký hiệu là $D(f)$.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.1**

1) Miền xác định của hàm $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ là $x^2 + y^2 < 4$. Vậy $D(f)$ gồm các điểm nằm trong vòng tròn tâm là gốc toạ độ và bán kính bằng 2.

2) Miền xác định của hàm $z = \sin(x + y)$ là R^2.

1.1.2 Giới hạn của hàm hai biến

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.3** Số *L* được gọi là giới hạn của hàm $z = f(x, y)$ khi điểm $M(x, y)$ tiến đến điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý cho trước có thể tìm được $\delta > 0$ sao cho khi $0 < M_0M < \delta$ thì $\left|f(x, y) - A\right| < \varepsilon$. Ký hiệu

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = A$$

Hay

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Giới hạn của hàm hai biến còn có thể định nghĩa thông qua giới hạn của dãy như sau:

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.4** Cho hàm số $f(M) = f(x, y)$ xác định trong miền D chứa điểm $M_0(x_0, y_0)$ có thể trừ điểm M_0. Ta nói rằng L là giới hạn của $f(x, y)$ khi điểm $M(x, y)$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu với mọi dãy $M_n(x_n, y_n)$ thuộc D dần tới M_0 ta đều có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = L$. Ký hiệu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ hay $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = L$.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.2** Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ với

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Giải.

Ta có $\left|f(x, y)\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.|y| \le |y|, \forall (x, y) \ne (0, 0)$, do đó $\forall \left\{(x_n, y_n)\right\} \to (0, 0)$ ta đều có

$\lim\limits_{(x_n,y_n)\to(0,0)} f(x_n, y_n) = 0.$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.3** Chứng minh $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ không tồn tại

Giải.

Cho $y = x$ ta có

$$L = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2},$$

nhưng cho $y = 2x$ thì

$$L = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} = \frac{2}{5}.$$

Vậy khi (x, y) tiến về $(0, 0)$ theo các hướng khác nhau thì $f(x, y)$ có những giới hạn khác nhau.

Do đó $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ không tồn tại.

1.1.3 Tính liên tục của hàm hai biến.

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.5** Giả sử $M_0(x_0, y_0) \in D(f)$. Hàm $z = f(x, y)$ được gọi là hàm liên tục tại điểm M_0 nếu

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Hàm số liên tục tại mọi điểm của một miền nào đó gọi là hàm liên tục trong miền đó. Điểm mà tại đó hàm số không liên tục gọi là điểm gián đoạn của hàm số.

Ví dụ Error! No text of specified style in document..**4**

1) Hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2$ liên tục tại mọi điểm của R^2

2) Hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$ gián đoạn tại $(0,0)$ vì không tồn tại

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

1.2 Đạo hàm riêng

1.2.1 Đạo hàm riêng cấp một

Định **nghĩa** Error! No text of specified style in document..**6** Cho hàm $z = f(x,y)$. Nếu xem *y* là một hằng số (*tham số*) thì f trở thành hàm của một biến số *x*. Ta gọi đạo hàm riêng của *z* theo biến *x* là giới hạn

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Ký hiệu $z'_x,\ f'_x,\ \dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Tương tự ta cũng định nghĩa đạo hàm riêng của hàm $z = f(x,y)$ theo biến y.

Ví dụ Error! No text of specified style in document..**5**

1) Cho $z = x^2 + y$. Ta có $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

2) Hàm số $z = x^y$. Ta có $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

1.2.2 Đạo hàm riêng cấp cao

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.7** Cho hàm số $z = f(x,y)$. Các đạo hàm $f_x^{'}, f_y^{'}$ là những đạo hàm riêng cấp một. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một gọi là các đạo hàm riêng cấp hai. Ký hiệu các đạo hàm riêng cấp hai như sau

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{x^2}^{"}\left(x,y\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}^{"}\left(x,y\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}^{"}\left(x,y\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{y^2}^{"}\left(x,y\right).$$

Định lí Error! No text of specified style in document.**.1** *Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0,y_0)$ hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng $f_{xy}^{''}, f_{yx}^{''}$ và nếu các đạo hàm ấy liên tục tại M_0 thì $f_{xy}^{''}, = f_{yx}^{''}$ tại M_0.*

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.6** $z = e^{xy}; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$

1.3 Vi phân

1.3.1 Vi phân toàn phần

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.8** Nếu hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận điểm (x_0,y_0) và các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại (x_0,y_0) thì ta có

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + 0(\rho),$$

trong đó

$$\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0,\ \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta .$$

$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ được gọi là số gia toàn phần của z. Hàm $0(\rho)$ là vô cùng bé cấp cao hơn ρ khi $\rho \to 0$. Ta cũng nói hàm z khả vi tại điểm (x_0,y_0) .

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.9** Khi $z = f(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0) ta gọi phần tuyến tính

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

là vi phân toàn phần của $z = f(x,y)$ tại (x_0, y_0) và ký hiệu là $dz(x_0, y_0)$. Vậy:

$$dz(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\,,$$

hay

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy\,.$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.7** Xét hàm $z = x^y$ ta có

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy\,.$$

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.10** Vi phân cấp hai của hàm $z = f(x,y)$ là vi phân toàn phần của $df(x,y)$ tức là $d(df)$ và được kí hiệu là $d^2 z$ hay $d^2 f$.

Bằng cách dựa vào đạo hàm riêng cấp 2, ta được công thức

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\,.$$

Áp dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng

Xét hàm $z = f(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0). Khi $\left|\Delta x\right|$ và $\left|\Delta y\right|$ đủ bé ta có công thức gần đúng sau

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

hoặc

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.8** Tính gần đúng giá trị $1,02^{3,01}$.

Giải.

Xét hàm $z = x^y$, $x = 1, y = 3, \Delta x = 0,02, \Delta y = 0,01$. Khi đó $1,02^{3,01} \approx 1 + 0,06 = 1,06$.

Đạo hàm hàm hợp

Cho $z = f(u,v)$ với $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ thì các đạo hàm riêng của z theo x, y được tính theo công thức sau

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

tương tự

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.9** Tính các đạo hàm riêng của z theo x, y với $z = e^{u^2+v^2},\ u = a\cos x,\ v = a\sin x$.

Giải.

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} \\ &= e^{u^2+v^2} 2u(-a\sin x) + e^{u^2+v^2} 2v(a\cos x) \\ &= 2ae^{u^2+v^2}(v\cos x - u\sin x).\end{aligned}$$

1.4 Cực trị của hàm hai biến

1.4.1 Điểm cực đại, điểm cực tiểu

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.11** $M_0(x_0, y_0)$ được gọi là điểm cực đại của $z = f(x,y)$ nếu tại mọi điểm $M(x,y)$ trong lân cận của M_0 ta đều có $f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$. Trong trường hợp này ta cũng nói là hàm $z = f(x,y)$ đạt cực đại tại $M_0(x_0, y_0)$.

Nếu thay chữ "đại" bởi chữ "tiểu" và bất đẳng thức $f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$ thay bởi $f(x_0, y_0) \leq f(x,y)$ thì $M_0(x_0, y_0)$ được gọi là điểm cực tiểu của $z = f(x,y)$.

Điểm cực đại và cực tiểu khi chưa cần phân biệt được gọi chung là điểm cực trị hay gọn hơn gọi là cực trị.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.10** Cho hàm $z = x^2 + (y-1)^2 + 2$. Ta có $z(0,1) = 2$ và $z(x,y) \geq 2 = z(0,1), \forall (x,y)$.Vậy $(0,1)$ là điểm cực tiểu của hàm z. Giá trị cực tiểu thu được là 2. Điểm $(2,3)$ chẳng phải là điểm cực trị của hàm z vì trong lân cận của nó có các điểm khác mà giá trị tại chúng có thể lớn hơn, có thể nhỏ hơn giá trị của z tại $(2,3)$.?

1.4.2 Cách tìm điểm cực trị của hàm hai biến

Ta có điều kiện cần như sau

Định lí Error! No text of specified style in document.**.2** *Nếu hàm* $z = f(x,y)$ *đạt cực trị tại* $M_0(x_0, y_0)$ *thì tại đó hoặc không tồn tại hai đạo hàm riêng hoặc các đạo hàm riêng* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *đều bằng 0.*

Các điểm (x_o, y_o) mà $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = 0$ được gọi là điểm dừng. Như vậy để tìm cực trị của hàm hai biến trước hết ta tìm các điểm (x_o, y_o) mà tại đó không tồn tại hai đạo hàm riêng và các điểm dừng.

Định lí Error! No text of specified style in document.**.3** (Điều kiện đủ) *Giả sử* $M_0(x_0, y_0)$ *là một điểm dừng của* $z = f(x,y)$ *và tại* M_0 *hàm z có các đạo hàm riêng*

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0) = C$. *Khi đó*

i) Nếu $B^2 - AC < 0$ *thì hàm đạt cực trị tại* M_0 *(đạt cực tiểu nếu* $A > 0$, *đạt cực đại nếu* $A < 0$*);*

ii) nếu $B^2 - AC > 0$ *thì hàm không có cực trị tại* M_0*;*

iii) nếu $B^2 - AC = 0$ *thì chưa có kết luận.*

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.11** Tìm cực trị của hàm số

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$

Giải.

Ta có $f'_x = 3x^2 - 6y,\ f'_y = 3y^2 - 6x \quad \forall (x,y)$ hay hàm số luôn tồn tại hai đạo hàm riêng. Các điểm dừng là nghiệm của

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ x = \frac{1}{2}y^2 \end{cases}.$$

Giải hệ ta được hai điểm dừng $M_0(0;0)$ và $M_1(2;2)$.

Xét điểm $M_0(0;0)$: Ta có $A = f''_{xx}(0;0) = 6x\big|_{M_0} = 0,\ B = f''_{xy}(0;0) = -6$,

$C = f''_{yy}(0;0) = 6y\Big|_{M_0} = 0$.

$B^2 - AC = 36 > 0$ nên tại M_0 không phải là cực trị.

Xét điểm $M_1(2;2)$: Ta có $A = f''_{xx}(2,2) = 6x\Big|_{M_1} = 12$, $B = f''_{xy}(2,2) = -6$,

$C = f''_{yy}(2,2) = 6y\Big|_{M_1} = 12$.

$B^2 - AC = -108 < 0$. Mà $A = 12 > 0$. Do đó $(2,2)$ là điểm cực tiểu của hàm số và giá trị cực tiểu là $f(2,2) = 8 + 8 - 24 = -8$.

1.4.3 Cực trị có điều kiện

Bài toán cực trị có điều kiện là bài toán tìm cực trị của hàm $z = f(x,y)$ với ràng buộc $\varphi(x,y) = 0$. Điều này khác với tìm cực trị tự do của hàm $z = f(x,y)$ trên toàn tập xác định thỏa điều kiện $\varphi(x,y) = 0$.

Từ điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ nếu suy ra được $y = y(x)$ thì hàm $z = f(x,y) = f(x,y(x))$ là hàm số một biến. Ta tìm cực trị hàm một biến. Trong trường hợp việc rút $y = y(x)$ phức tạp ta sử dụng phương pháp nhân tử số Lagrange theo các bước sau:

Bước 1. Lập hàm Lagrange: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ với λ gọi là nhân tử số Lagrange.

Bước 2. Tìm điểm dừng của hàm L, tức là giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$$

Bước 3. Xét dấu $d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2$ tại từng điểm dừng (x_0, y_0, λ_0).

- Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0) < 0$ thì $z_{\max} = f(x_0,y_0)$.
- Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0) > 0$ thì $z_{\min} = f(x_0,y_0)$.
- Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$ không xác định dấu thì (x_0,y_0) không là điểm cực trị.

Để khảo sát dấu $d^2L\left(x_0,y_0\right)$ đôi khi ta cần sử dụng điều kiện:

$$\varphi\left(x,y\right) = 0 \Rightarrow d\varphi\left(x,y\right) = 0$$

hay

$$\varphi'_x\left(x,y\right)dx + \varphi'_y\left(x,y\right)dy = 0.$$

Tại $\left(x_0, y_0\right)$ ta được

$$\varphi_x'\left(x_0, y_0\right)dx + \varphi_y'\left(x_0, y_0\right)dy = 0.$$

Từ đây, ta có dx theo dy hoặc ngược lại. Thay vào biểu thức của $d^2L\left(x_0, y_0\right)$, ta được một hàm theo dx^2 hoặc dy^2. Chú ý rằng trong bài toán cực trị có điều kiện, dx và dy không đồng thời bằng 0.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.12** Tìm cực trị của hàm $z = xy$ với $x + y = 2$.

Giải.

Ta tìm cực trị của hàm $z = xy$ với ràng buộc $\varphi(x, y) = x + y - 2 = 0$.

Bước 1. $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 2)$

Bước 2. Giải hệ $\begin{cases} L_x' = y + \lambda = 0 \\ L_y' = x + \lambda = 0 \\ L_\lambda' = x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow L$ có điểm dừng là $(1;1;-1)$

Bước 3. $L_{xx}'' = 0,\ L_{xy}'' = 1,\ L_{yy}'' = 0 \Rightarrow d^2L = 2dxdy$.

Vì $x + y = 2 \Rightarrow dx + dy = 0 \Rightarrow dx = -dy$. Do đó $d^2L = -2dx^2 < 0$. Vậy tại $(1;1)$ hàm số đạt cực đại $z_{\max} = f(1;1) = 1$.

1.4.4 Giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm hai biến

Các bước tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm $z = f(x, y)$ trong miền đóng:

Bước 1. Tìm các điểm dừng nằm trong miền này và tính giá trị của hàm tại các điểm dừng.

Bước 2. Tìm các cực trị với ràng buộc là phương trình đường biên.

Bước 3. Chọn giá trị lớn nhất và bé nhất trong tất cả các giá trị đã tìm được.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.13** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $z = x^2 + y^2$ trong hình tròn $C : (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2$.

Giải.

Hàm $z = x^2 + y^2$ có một điểm dừng $(0;0)$ nằm trên C và tại $(0;0)$ hàm *z* có giá trị bé nhất $z_{\min} = 0$.

Từ ràng buộc

$$\begin{aligned}&\varphi(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2-2=0\\ \Leftrightarrow\ & x^2+y^2=2x+2y\end{aligned}$$

Ta có

$$x^2+y^2=2\left(x+y\right)\le 2\sqrt{2}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}.$$

Suy ra

$$\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\le 2\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2+y^2\le 8.$$

Vậy giá trị lớn nhất của z trong hình tròn C là 8 khi $\mathrm{x}=y=2$. Tóm lại $z_{\max}=z(2,2)=8$ và $z_{\min}=z(0,0)=0$.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.14** Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $f\left(x,\ y\right)=x^2+2xy+3y^2$ trong một miền đóng *D* là hình tam giác có các đỉnh *A*(–1; 1), *B*(2; 1) , *C*(–1; –2) .

Giải.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f_x^/=2x+2y=0\\ f_y^/=2x+6y=0\end{cases}$$

có nghiệm (0;0) $\in D$, $f\left(0,\ 0\right)=0$.

- Trên cạnh *AB*: $y=1,-1\le x\le 2$. Thay vào biểu thức của $f(x,y)$ ta được $g(x)=x^2+2x+3$. Tam thức đạt cực tiểu tại $x=-1$. Ta có $g(-1)=f\left(-1;\ 1\right)=2,\ \ f\left(2\ ,\ 1\right)=11.$

- Trên cạnh *AC*: $x=-1,-2\le y\le 1,\ f\left(-1,y\right)=3y^2-2y+1$ và đạt cực tiểu tại $\mathrm{y}=\dfrac{1}{3}$. Ta có

$$f(-1;\frac{1}{3})=\frac{2}{3},\ f\left(-1;\ 1\right)=2,f\left(-1;\ \ -2\right)=17.$$

- Trên cạnh *BC*: $x-y=1$ do đó

$$y=x-1,\ f\left(x,x-1\right)=x^2+2x\left(x-1\right)+3\left(x-1\right)^2,-1\le x\le 2$$

và đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{2}{3}$.

$f(\frac{2}{3},\frac{-1}{3}) = \frac{1}{3}$, $f(2,1) = 11$, $f(-1,-2) = 17$. So sánh các giá trị đã tính ta được

$f_{\min} = 0, f_{\max} = 17.$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1.1. Miền xác định của hàm số

a) $z=\dfrac{1-x^2}{1-x^2-y^2}$ b) $z=\dfrac{1+\sin xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ c) $z=\dfrac{xy}{5-x^2-y^2}$

d) $z=\ln\dfrac{1-x^2}{2-\sin x}$ e) $z=e^{1+\sin xy}$ f) $z=\dfrac{1}{8-x-y}$

1.2. Miền giá trị của hàm số

a) $z=\cos(1-xy)$ b) $w=xy\sin z$ c) $w=x^2+2x+4+y^2$

1.3. Tính các giới hạn

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)}\dfrac{xy-1}{x+1}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1;0)}\dfrac{x^2+x+2y}{x^2+3y^2}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(2;1)}\left(e^{x^2-y^2}+1\right)$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to-2}}\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$ e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty;1)}\dfrac{e^y\sin(1/2x)}{1/2x}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(1;1)}e^{\sqrt{x-y}}$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ i) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x+y}$

1.4. Cho hàm số $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$. Định nghĩa $f(0,0)$ để hàm số liên tuc trên R^2

1.5. Tìm a để các hàm số liên tục

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\cos 2xy-1}{x^2y}, & (x,y)\neq(0,0)\\ a, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ trên R^2

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x-y}, & (x,y)\neq(0,0)\\ a, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ tại $(0,0)$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{2(x+y)}, & (x,y)\neq(1,-1)\\ a, & (x,y)=(1,-1)\end{cases}$ tại $(1,-1)$

1.6. Tính các đạo hàm riêng cấp một

a) $z = x^3 + \ln y^3 - 3xy$ b) $z = e^{x^2+yx} + \ln x$ c) $z = x^2 \sin \frac{x}{y}$

d) $z = x^3 - 3x^y$ e) $z = \ln x\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ f) $z = x^2 tg \frac{x}{y}$

1.7.Tính gần đúng các số sau

a) $\sqrt{9.1,95^2 + 8,1^2}$ b) $\ln(0,09^3 + 0,99^3)$ c) $\sqrt{5e^{0,02} + 2,03^2}$

1.8. Tính các đạo hàm riêng cấp hai

a) $z = e^x \sin y - x^3 + 2y$ b) $z = x^3 + y^3 + \ln\left(xy\right)$ c) $z = \sqrt{x + y}$

d) $z = \sin(2x + 3y)$ e) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ f) $z = \cot g\left(x + y\right)$

1.9. Tính đạo hàm các hàm hợp

a) Cho $z = e^{x^2+y^2}$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. Tính $\frac{\partial z}{\partial t}$

b) Cho $z = e^u cosv$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

c) Cho $z = \ln x + \sqrt{y}$, $y = \sin x$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}$

1.10. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $z = x^4 - 8x^2 + y^2 + 5$ b) $z = x^2 + y^2 - 2x + 1$ c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $z = xy + 3x - 2y$ e) $z = x^2 - y^2$ f) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

g) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ h) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ i) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

1.11. Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = 6 - 4x - 3y$ với $x^2 + y^2 = 1$

b) $z = xy$ với $x + y = 1$

c) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ với $y - x = \frac{\pi}{4}$

1.12. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

a) $z = xy + x + y$ trong hình vuông giới hạn bởi $x = 1, x = 2, y = 2, y = 3$.

b) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ trong tam giác giới hạn bởi $yx = 1, y = 1, x + y = 1$.

c) $z = 1 - x^2 - y^2$ trong hình tròn $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

CHƯƠNG 2 TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

2.1 Tích phân kép

2.1.1 Các định nghĩa

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.12** Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset R \times R$. Tích phân kép trên miền D của hàm $z = f(x, y)$ được ký hiệu là

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

và được định nghĩa như sau:

1) Nếu D là hình chữ nhật $D: a \le x \le b, c \le y \le d$ thì:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Người ta chứng minh được rằng:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

nên có thể viết:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Để đơn giản cách viết ta quy ước $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ có thể được viết $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$

2) Nếu D có dạng $a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)$ thì:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

3) Nếu D có dạng $x_1(y) \le x \le x_2(y)$, $c \le y \le d$ thì:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{x_2(y)}^{x_1(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} d(x, y) dx$$

Nếu tồn tại tích phân kép của hàm $z = f(x,y)$ trên miền D thì ta nói $f(x,y)$ khả tích trên *D*. Miền *D* được gọi là miền lấy tích phân. Người ta chứng minh được rằng nếu $z = f(x,y)$ liên tục trên *D* thì nó khả tích trên *D*.

Tích phân kép chỉ phụ thuộc *D* và $z = f(x,y)$, không phụ thuộc vào ký hiệu biến số, nghĩa là

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(u,v)dudv.$$

2.1.2 Các tính chất của tích phân kép

1) $\iint_D kf(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy$ (k là hằng số).

2) $\iint_D \left[f_1(x,y) + f_2(x,y)\right]dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy + \iint_D f_2(x,y)dxdy$

3) Nếu miền lấy tích phân *D* chia thành hai miền D_1 và D_2 rời nhau thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

4) Nếu tại mọi điểm thuộc miền *D* ta luôn có $f(x,y) \geq 0$ thì $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$.

5) Nếu tại mọi điểm thuộc miền *D* ta luôn có $f(x,y) \geq \varphi(x,y)$ thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D \varphi(x,y)dxdy$$

6) Nếu *m* và *M* là các giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm số $f(x,y)$ trong miền *D* thì

$$mS_D \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq MS_D$$

trong đó S_D là diện tích của miền *D*.

7) Nếu $f(x,y)$ liên tục trong miền *D* thì trong miền đó tìm được ít nhất một điểm $M_i\left(\xi_i,\eta_i\right)$) sao cho:

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy = f\left(\xi_i,\eta_i\right)S_D$$

Giá trị của hàm số $f(x,y)$ tại điểm $M_i\left(\xi_i,\eta_i\right)$ gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x,y)$ trong miền *D*.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.15** Tính $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$ với

$D: 1 \le x \le 2, 1 \le y \le 3$.

Giải. Ta có:

$$I = \int_1^2 \left(\int_1^3 \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \ln \frac{x+1}{x+3} \bigg|_1^2 = \ln \frac{6}{5}$$

2.1.3 Đổi biến trong tích phân kép

1) Công thức đổi biến số tổng quát

Xét tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Giả sử tồn tại các hàm $x = x(\xi,\eta),\ y = y(\xi,\eta)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên miền D' sao cho $(\xi,\eta) \mapsto (x,y)$ là một song ánh từ D' đến D.

Đặt

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

Nếu $\Delta \neq 0$ trên D' thì ta có công thức đổi biến số tổng quát trong tích phân kép như sau:

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f\left(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\right) |\Delta| d\xi d\eta$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.16** Tính $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$, D là hình bình hành giới hạn bởi các đường

$x + 2y = 2, x + 2y = 4, 3x - y = 0, 3x - y = 3$.

Giải. Đặt

$$\begin{cases} x + 2y = \xi \\ 3x - y = \eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7}(\xi + 2\eta) \\ y = \frac{1}{7}(3\xi - \eta) \end{cases}.$$

Ta có:

$$2 \le \xi \le 4, 0 \le \eta \le 3, \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{vmatrix} = -\frac{1}{7} \neq 0.$$ Khi đó:

$$I = \int_2^4 \left[\int_0^3 \left(\frac{1}{7}(\xi + 2\eta) + \frac{1}{7}(3\xi - \eta) \right) d\eta \right] d\xi = \frac{1}{7} \int_2^4 \left(\int_0^3 (4\xi + \eta) d\eta \right) d\xi = \frac{81}{7}.$$

2) Đổi biến trong hệ toạ độ cực

Đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Khi đó

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi,\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} r\cos\varphi.$$

Do đó:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Theo công thức đổi biến số ta có công thức đổi biến trong hệ toạ độ cực:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

Giả sử cần tính tích phân kép $I = \iint_D f(x,y)dx\mathrm{dy}$ trong hệ tọa độ cực trong đó miền *D* có tính chất là mọi tia xuất phát từ gốc cực *O* cắt biên của nó không quá hai điểm. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Gốc cực *O* nằm ngoài miền *D*.

Giả sử miền D nằm giữa các tia $\varphi = \alpha$ và $\varphi = \beta$, mọi tia xuất phát từ gốc cực *O* cắt biên của *D* không quá hai điểm và $r = g_1(\varphi),\ r = g_1(\varphi)$ lần lượt là phương trình trong hệ tọa độ cực của đường biên. Khi đó

$$\iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

Trường hợp 2: Gốc cực *O* nằm trên biên của miền *D*.

Giả sử mọi tia xuất phát từ gốc cực *O* cắt biên của miền *D* không quá một điểm (không kể điểm *O*) và phương trình của biên trong hệ tọa độ cực là $r = g(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$. Khi đó

$$\iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{g(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

Trường hợp 3: Gốc cực *O* nằm trong miền *D*.

Giả sử mọi tia xuất phát từ gốc cực *O* cắt biên của miền *D* tại một điểm và phương trình của biên trong hệ tọa độ cực là $r = g(\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$. Khi đó

$$\iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{g(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr .$$

Như vậy muốn chuyển tích phân kép $\iint_D f(x,y)dxdy$ từ hệ tọa độ Đề - các sang hệ tọa độ cực , ta thay *x* và *y* trong hàm số dưới dấu tích phân bởi $r\cos\varphi$ và $r\sin\varphi$, còn $dxdy$ thay bằng *rdrdφ*. Đồng thời phương trình đường cong giới hạn miền lấy tích phân *D* cũng phải đổi sang hệ tọa độ cực bằng cách thay $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Sau đó tính tích phân hoàn toàn giống như trong hệ tọa độ Đề - các.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.17** Tính

$I = \iint_D y dxdy,\ D: x^2 + y^2 = R^2, x \ge 0, y \ge 0$.

Giải. Đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Khi đó $D': 0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

Vậy

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^R (r\sin\varphi) r dr \right) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left(\sin\varphi . \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \right) d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi = \frac{R^3}{3}.$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.18** Tính $I = \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2) dy \right) dx$.

Giải. Ta có

$$\begin{cases} 0 \le x \le R \\ 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \le R^2 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}.$$

Do đó, đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Vậy

$$I = \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} \ln(1+r^2) r d\varphi \right) dr = \frac{\pi}{2} \int_0^R r\ln(1+r^2) dr = \frac{\pi}{4}\left[(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2\right].$$

2.1.4 Ứng dụng của tích phân kép

1) Tính diện tích hình phẳng

Diện tích $s(D)$ của hình phẳng D được cho bởi công thức

$$s(D) = \iint_D dxdy$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.19** Tính diện tính hình phẳng giới hạn bởi

$y^2 = \dfrac{b^2}{a} x,\ y = \dfrac{b}{a} x\ (a, b > 0)$.

Giải. Do hai đường cong cắt nhau tại $O(0;0),\ A(a,b)$ nên ta có:

$$s(D) = \iint_D dxdy = \int_0^a \left(\int_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}} dy \right) dx = \frac{ab}{6}.$$

2) Tính thể tích vật thể không gian

Thể tích *V* của vật thể hình trụ giới hạn bởi *D* và đồ thị hàm $z = f(x, y)$ không âm được tính theo công thức:

$$V = \iint_D f(x, y) dxdy$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.20** Tính thể tích *V* của phần hình trụ giới hạn bởi mặt $x^2 + y^2 = 2x$ nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Giải. Do tính đối xứng nên $V = 4V'$, với:

$$V' = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy$$

trong đó *D* là nửa hình tròn tâm $I(1;0;0)$ và bán kính bằng 1, trong mặt phẳng *xOy*.

Đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Khi đó phương trình đường tròn đã cho là $r = 2\cos\varphi$ nên:

$$D: 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi$$

Vậy

$$V' = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\varphi}\sqrt{4-r^2}\,rdr\right)d\varphi = -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left((4-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\cos\varphi}\right)d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\varphi)d\varphi = \frac{8}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}) \Rightarrow V = \frac{16}{3}(3\pi-4).$$

2.2 Tích phân đường

2.2.1 Tích phân đường loại 1

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.13** Cung (C) xác định bởi phương trình $y = y(x), a \le x \le b$ được gọi là cung trơn nếu hàm $y = y(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$.

Trường hợp cung (C) cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$ thì (C) gọi là cung trơn nếu hai hàm $x(t), y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[t_1, t_2]$ và $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \ne 0$.

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.14** Cho đường cong (hay cung) (C) trong mặt phẳng R^2 và hàm $z = f(x,y)$ xác định trên (C). Tích phân đường loại 1 của f dọc theo cung (C) ký hiệu là

$$\int_{(C)} f(x,y)ds$$

và được xác định như sau:

Nếu cung trơn (C) cho bởi phương trình $y = y(x), a \le x \le b$ thì

$$\int_{(C)} f(x,y)ds = \int_a^b f\left(x, y(x)\right)\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx$$

Nếu cung trơn (C) cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2$ thì

$$\int\limits_{(C)} f(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\, dt$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.21** Tính $I = \int\limits_{(C)} (x-y)ds$ với (C) là đoạn thẳng nối hai điểm $A(0;0)$ và $B(4;3)$.

Giải. Ta có (C) có phương trình $y = \dfrac{3}{4}x$. Suy ra $y' = \dfrac{3}{4}$ nên:

$$I = \int\limits_0^4 (x - \frac{3}{4}x)\sqrt{1 + \frac{9}{16}}dx = \frac{5}{16}\int\limits_0^4 xdx = \frac{5}{2}$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.22** Tính $I = \int\limits_{(C)} (x^2 - y^2)ds$, (C) là phần đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ trong góc phần tư thứ nhất.

Giải. Phương trình tham số của cung (C) là $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Suy ra

$$x'(t) = -R\sin t,\ y'(t) = R\cos t$$

Do đó

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} R^2(\cos^2 t - \sin^2 t)\sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt = R^3\int\limits_0^{\pi/2} \cos 2tdt = 0.$$

2.2.2 Tích phân đường loại 2

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.15** Cho hai hàm hai biến $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ xác định trên cung (C). Tích phân đường loại 2 của biểu thức $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ dọc theo cung (C) theo chiều ngược kim đồng hồ ký hiệu là :

$$\int\limits_{(C)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

và được xác định như sau:

Nếu cung trơn (C) được cho bởi phương trình $y = y(x), a \le x \le b$ thì:

$$\int\limits_{(C)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right).y'(x)\right]dx$$

Nếu cung trơn (C) cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$ thì:

$$\int\limits_{(C)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(x)\right).x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right).y'(t)\right]dt$$

Người ta đã chứng minh được rằng nếu (C) là một cung trơn và các hàm $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ liên tục thì tồn tại tích phân đường loại 2. Tích phân đường loại 2 phụ thuộc vào hướng đi trên cung (C).

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.23** Tính $I = \int\limits_{(C)} ydx - xdy$, (C) là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ nằm trên *Ox*, ngược chiều kim đồng hồ.

Giải. Ta có (C) xác định bởi phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y \ge 0 \end{cases}$ hay $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ với *x* đi từ *a* đến – *a*. Khi đó: $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Vậy

$$I = \int\limits_a^{-a} \left(\sqrt{R^2 - x^2} - x.\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)dx = R^2 \int\limits_a^{-a} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\pi R^2.$$

Cách khác:

Ta có

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi \Rightarrow x'(t) = -R\sin t,\ y'(t) = R\cos t.$$

Do đó

$$I = \int\limits_0^{\pi} \left[R\sin t.(-R\sin t) - R\cos t.(R\cos t)\right]dt = \int\limits_0^{\pi} (-R^2)dt = -\pi R^2.$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.24** Tính $I = \int\limits_{(C)} xy^2dy - x^2ydx$, (C) là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Giải.

Ta có $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi \Rightarrow x'(t) = -R\sin t,\ y'(t) = R\cos t$. Suy ra:

$$I = \int_0^{2\pi} \left[(R\cos t)(R\sin t)^2 (R\cos t) - (R\cos t)^2 (R\sin t)(-R\sin t) \right] dt = \frac{\pi R^4}{2}.$$

2.2.3 Công thức Green

Định lí Error! No text of specified style in document.**.4** *Cho hai hàm hai biến* $P(x,y)$; $Q(x,y)$ *có các đạo hàm riêng liên tục trong miền D và* (C) *là biên của D. Khi đó ta có*:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{(C)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.25** Tính $\oint_{(C)} (x+y)dx - (x-y)dy$, (C) là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$.

Giải. Áp dụng công thức Green với $P(x,y) = x + y;\ Q(x,y) = -(x-y)$. Ta có: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ và $(C): x^2 + y^2 = R^2,\ D: \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$. Suy ra:

$$I = \iint_D -2dxdy = -2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R rdr \right) d\varphi = -2\pi R^2$$

Từ công thức Green ta có thể suy ra: nếu đường kín (C) là biên của miền *D* thì diện tích $s(D)$ của miền *D* được xác định bởi:

$$s(D) = \frac{1}{2}\oint_{(C)} -ydx + xdy$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.26** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường có phương trình tham số sau:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Giải. Ta có: $x' = -3a\sin t\cos^2 t,\ y' = 3a\cos t\sin^2 t$. Theo hệ quả của công thức Green ta có:

$$s(D)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[(-a\sin^3 y)(-3a\sin t\cos^2 t)+(a\cos^3 t)(3a\cos t\sin^2 t\Big]dt=\frac{3\pi a^2}{8}$$

Định lí Error! No text of specified style in document.**.5** (Điều kiện để tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường lấy tích phân)

Giả sử $P(x,y);\ Q(x,y)$ *là các hàm hai biến liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong miền D, biên của D là một đường cong kín đơn* (C). *Khi đó bốn mệnh đề sau là tương đương:*

i) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *với mọi* $(x,y)\in D$.

ii) $\oint\limits_{(C')} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, (C') *là một đường cong kín trong D.*

iii) $\int\limits_A^B P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *chỉ phụ thuộc vào hai điểm A và B mà không phụ thuộc vào đường nối A, B.*

iv) Biểu thức $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *là vi phân của một hàm hai biến* $f(x,y)$ *trên D.*

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.27** Tính $I=\int\limits_{(1,1)}^{(2,3)}(x+3y)dx+(y+3x)dy$.

Ta có: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3$.

Giải. Do đó tích phân đã cho không phụ thuộc đường lấy tích phân. Ta lấy đường gấp khúc có các cạnh song song với các trục toạ độ làm đường lấy tích phân. Trên đoạn thứ nhất $y=1,\ dy=0,\ 1\le x\le 2$. Trên đoạn thứ hai $x=2,\ dx=0,\ 1\le y\le 3$. Khi đó

$$I=\int_1^2(x+3)dx+\int_1^3(y+6)dy=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_1^2+\left(\frac{y^2}{2}+6y\right)\Bigg|_1^3=\frac{41}{2}.$$

Nhận xét: Nếu $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ là vi phân của hàm hai biến $f(x,y)$ trên R^2 thì

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+c$$

hoặc

$$f(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+c$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.28** Tìm $f(x,y)$ nếu
$df = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy$.

Giải. Ta có $P(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $Q(x,y) = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}$ và $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$. Chọn $(x_0, y_0) \equiv (1;1)$ thì ta được

$$f(x,y) = \int_1^x (\frac{1}{x} + 1)dx + \int_1^y (\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2})dy = \ln x + 2\ln y + \frac{x}{y} - 1 + c$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Tính các tích phân kép

a) $\iint\limits_D x\ln y dxdy$, $D: 0 \le x \le 4, 1 \le y \le e$

b) $\iint\limits_D (\cos^2 x + \sin^2 y)dxdy$, $D: 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 0 \le y \le \frac{\pi}{4}$

c) $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, $D: y = 2 - x^2, y = 2x - 1$

d) $\iint\limits_D xdxdy$, $D: y = x^2, y^2 = x$

2.2. Tính các tích phân kép

a) $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, $D: y = x, x = 0, x + y - 2a = 0, a > 0$

b) $\iint\limits_D (x + 2y)dxdy$, $D: y = x^2, y = \sqrt{x}$

c) $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$, $D: y = 0, y = x, x + y = \frac{\pi}{2}$

2.3. Thay đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân kép sau

a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$ b) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy$ c) $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{0}^{2y} f(x,y)dx$

2.4. Tính các tích phân sau bằng cách đổi biến

a) $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy$, $D: x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1$

b) $\iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy$, $D: y^2 = x, y^2 = ex, xy = 1, xy = 4$

c) $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2 - 9}dxdy$, $D: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 25$

2.5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $y = \sqrt{x}, y = x - 4, y = 0$ b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

c) $y^2 = x^3, y^2 = 8(6 - x)^3$ d) $y = 2^x, y = -2x, y = 4$

2.6. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt

a) $z = x^2 + y^2, z = x + y$

b) $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1, z = x^2 + xy + 1$

$z = xy, x + y = 1, z = 0$

2.7. Tính các tích phân đường loại 1

a) $\int\limits_{(C)} (x + y)ds$, (C) là đoạn thẳng nối $A(9;6)$, $B(1;2)$.

b) $\int\limits_{(C)} xyds$, (C) là hình vuông $|x| + |y| = a, a > 0$.

c) $\int\limits_{(C)} \frac{yds}{\sqrt{x}}$, (C) là cung parabol $y^2 = \frac{4}{9}x^3$ từ $A(3;2\sqrt{3})$ đến $B(8;\frac{32\sqrt{2}}{3})$.

d) $\int\limits_{(C)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$, (C) là đường tròn tâm gốc toạ độ bán kính 5.

2.8. Tính $\int\limits_{(C)} y^2dx + x^2dy$, (C) là đường nối $O(0;0)$, $B(1;1)$ trong các trường hợp sau

a) Đoạn thẳng OB. b) Cung parabol $x^2 = y$ c) Cung parabol $y^2 = x$

2.9. Tính $\int\limits_{(C)} y^2dx - x^2dy$, (C) là

a) Đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính bằng 1.

b) Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính bằng 1.

c) Đường gấp khúc OAB với $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;2)$.

2. 10. Tính các tích phân đường loại 2

a) $\int\limits_{(C)} ydx - (y + x^2)dy$, (C) là cung parabol $y = 2x - x^2$ nằm phía trên trục Ox và theo chiều kim đồng hồ.

b) $\int\limits_{(C)} ydx + 2xdy$, (C) là hình thoi ngược chiều kim đồng hồ, các cạnh có phương trình:

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \pm 1, \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \pm 1$

c) $\int\limits_{(C)} 2xdy - 3ydx$, (C) là tam giác ABC ngược chiều kim đồng hồ và $A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(2;5)$.

2.11. Áp dụng công thức Green tính

a) $\int\limits_{(C)} (x^2 - y^2)dx + y^2dy$, (C) là elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) $\int\limits_{(C)} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, (C) là tam giác LMN với $L(1;1), M(2;2), N(1;3)$

c) $\int\limits_{(C)} -x^2ydx + xy^2dy$, (C) là vòng tròn $x^2 + y^2 = R^2$ chạy ngược chiều kim đồng hồ.

2.12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong

a) $y = x^2, x = y^2, 8xy = 1$

b) $y^2 = x, x^2 = y$

c) $x = 2r\cos t - r\cos 2t,\ y = 2r\sin t - r\sin 2t$

2.13. Tính $\int\limits_{O(0,0)}^{M(\pi,\pi)} (x + y)dx + (x - y)dy$

a) Theo đường thẳng OM.

b) Theo đường cong $y = x + \sin x$.

c) Theo parabol $y = \frac{x^2}{\pi}$.

So sánh và cho nhận xét kết quả của các câu trên? Giải thích?

2.14. Chứng minh rằng các biểu thức sau đây là vi phân của hàm hai biến $f(x,y)$ và tìm $f(x,y)$

a) $(x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$

b) $\frac{xdx}{x^2 + y^2} + \frac{(1 - x^2 - y^2)dy}{x^2 + y^2}$

c) $6xe^y dx + (3x^2 + y + 1)e^y dy$

CHƯƠNG 3 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

3.1 Khái niệm về phương trình vi phân

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.1** Một phương trình vi phân cấp n là phương trình có dạng

$$F(x, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

trong đó *F* là hàm theo biến độc lập *x*, *y* và các đạo hàm của *y* từ cấp 1 đến cấp *n*, *x* là biến độc lập và thuộc miền xác định *I*.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.1**

1) $yy' + 2x = 2$, $y' = 2y + x$, $y = x\dfrac{dy}{dx} + y^2$ … là các phương trình vi phân cấp 1.

2) $y'' + xy = 0$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 4 = 0$, phương trình dao động của con lắc đơn… là các phương trình vi phân cấp 2.

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.2** Hàm khả vi $y = \varphi(x)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân, nếu khi thay nó cho hàm chưa biết của phương trình sẽ được đồng nhất thức.

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.3** Nếu hàm số $y = \varphi(x, c)$ thoả mãn phương trình vi phân thì được gọi là nghiệm tổng quát (với $c \in R^n$ là hằng số). Mọi nghiệm $y = \varphi(x, c_0)$ nhận được từ nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, c)$ ứng với giá trị cụ thể $c = c_0$ gọi là nghiệm riêng.

Tích phân tổng quát của phương trình vi phân là nghiệm tổng quát dạng $\phi(x, y, c) = 0$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.2**

1) Xét phương trình $y'' = 0$. Ta có $y = c_1x + c_2$ là một nghiệm tổng quát, $y = 3x$ là một nghiệm riêng ứng với $c_1 = 3, c_2 = 0$.

2) Tích phân tổng quát phương trình $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ ta được nghiệm $y^2 + x^2 = cy$.

3.2 Phương trình vi phân cấp một

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.4** Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng $F(x, y, y') = 0$ hoặc dạng cơ bản giải ra được đối với y' là $y' = f(x, y)$.

Bài toán Cauchy là bài toán tìm đường cong trong R^2 thoả

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

trong đó $y(x_0) = y_0$ gọi là điều kiện ban đầu.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.3** Giải phương trình $y' = 2x$ với điều kiện ban đầu là $y(0) = 0$.

Giải.

Ta có nghiệm tổng quát là $y = x^2 + c$. Do $y(0) = 0$ nên $c = 0$. Vậy bài toán Cauchy ở trên có nghiệm là $y = x^2$.

Nếu hàm $f(x,y)$ và đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trong lân cận điểm (x_0, y_0) thì nghiệm của bài toán Cauchy tồn tại và duy nhất.

3.2.1 Phương trình tách biến

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.5** Phương trình vi phân tách biên là phương trình có dạng $y' = g(x).h(y)$

Thực hiện phép biến đổi

$$\frac{dy}{dx} = g(x).h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \Leftrightarrow H(y) = G(x) + c \qquad (1)$$

Ngoài nghiệm được xác định bởi (1), phương trình tách biến còn có nghiệm đặc biệt $y = y_0$, với y_0 là nghiệm số của phương trình $h(y) = 0$.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.4** Giải các phương trình vi phân

1) $y' = \dfrac{x-1}{y}$ 2) $(1+x^2)dy + ydx = 0$ thoả điều kiện ban đầu $y(1) = 1$.

Giải.

1) Ta có $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-1}{y} \Leftrightarrow ydy = (x-1)dx$

Tích phân hai vế ta được

$$\frac{y^3}{3} = \frac{(x-1)^2}{2} + c \Leftrightarrow y = \left(\frac{3(x-1)^2}{2} + 3c\right)^{\frac{1}{3}}.$$

2) Ta viết lại phương trình $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Tích phân hai vế ta được: $\ln|y| = -arctgx + c$.

Mà $y(1) = 1$ nên $\ln 1 = -arctg1 + c \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$. Vậy phương trình có nghiệm riêng là

$$\ln|y| = -arctgx + \frac{\pi}{4}.$$

3.2.2 Phương trình đẳng cấp

Hàm $f(x,y)$ gọi là hàm đẳng cấp bậc m nếu $f(tx,ty) = t^m f(x,y)$

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.6** Phương trình vi phân đẳng cấp là phương trình có dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

trong đó $P(x,y)$, $Q(x,y)$ là những hàm đẳng cấp cùng bậc.

Đặt $y = tx$. Khi đó phương trình đẳng cấp được đưa về phương trình tách biến đối với hàm cần tìm là *t*.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.5** Tìm nghiệm riêng của phương trình

$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$ (1) với $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Giải.

Đặt $y = tx$ và $dy = tdx + xdt$. Do đó phương trình (1) tương đương với

$$xdt + tdx = (t + \sin t)dx \Leftrightarrow xdt = \sin t dx \Leftrightarrow \frac{dt}{\sin t} = \frac{dx}{x}$$

Tích phân hai vế ta được

$$\ln\left|tg\frac{t}{2}\right| = \ln|x| + \ln|c| \Leftrightarrow y = 2xarctg(cx).$$

Do $y(1) = \frac{\pi}{2}$ nên $\frac{\pi}{2} = 2arctgc \Rightarrow c = 1$. Vậy nghiệm riêng phải tìm là $y = 2xarctgx$.

3.2.3 Phương trình tuyến tính

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.7** Phương trình vi phân tuyến tính là phương trình có dạng

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Để giải, trước hết tính tích phân

$$k(x) = e^{-\int P(x)dx}.$$

Đặt

$$y = h(x).k(x)$$

khi đó

$$h(x) = \int \frac{Q(x)}{k(x)} dx + c \text{ (c là hằng số).}$$

Nghiệm tổng quát cần tìm là

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + c \right].$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.6.** Giải phương trình

$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} - x\cos x = 0 \ \ (x > 0)$.

Giải.

Ta viết lại phương trình dạng $y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x \ (x > 0)$.

Đây là phương trình tuyến tính với $P(x) = -\frac{2}{x}$, $Q(x) = x^2 \cos x$.

Ta có

$k(x) = e^{-\int (-\frac{2}{x})dx} = e^{2\ln x} = x^2$ và $h(x) = \int \frac{x^2 \cos x}{x^2} dx + c = \int \cos dx + c = \sin x + c$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = x^2(\sin x + c)$.

3.2.4 Phương trình Bernoulli

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.8** Phương trình vi phân Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \ \ (n \neq 0, n \neq 1).$$

Để giải, đặt $z = y^{1-n}$ ta được phương trình mới

$$\frac{1}{1-m} z' + P(x)z = Q(x)$$

là phương trình tuyến tính.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.7** Giải phương trình $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$. Đây là phương trình Bernoulli với

$$P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = x^2, n = 4.$$

Giải. Đặt $z = y^{-3}$, ta được phương trình $z' - 3P(x)z = -3Q(x)$. Đây là phương trình vi phân tuyến tính và $k(x) = x^3$, $h(x) = 3\ln\frac{c}{x}$. Do đó $z = 3x^3\ln\frac{c}{x}$.

Suy ra nghiệm của phương trình đã cho là $y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}} = \frac{1}{x.\sqrt[3]{3\ln\frac{c}{x}}}$.

3.2.5 Phương trình vi phân toàn phần

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.9** Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

trong đó $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Ta nhận thấy vế trái của phương trình đã cho là vi phân toàn phần của hàm $u(x.y)$ nào đó. Do đó có thể viết $du = 0$ và nghiệm tổng quát $u = c$ được xác định theo công thức

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy,$$

trong đó điểm (x_0, y_0) chọn trước bất kỳ sao cho tích phân ở vế phải có nghĩa.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.8** Tìm tích phân tổng quát của

$(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0$

Giải. Ta có

$$P(x,y) = x + y - 1,\ Q(x,y) = e^y + x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Do đó phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Tích phân tổng quát theo công thức với $x_0 = y_0 = 0$ ta được

$$u = \int_0^x (x + y - 1)dx + \int_0^y e^y dy = \frac{1}{2}x^2 + xy - x + e^y - 1$$

Vậy nghiệm tổng quát là

$$e^y + xy - x + \frac{1}{2}x^2 = c.$$

3.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.10** Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 là phương trình có dạng

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

Trong đó y', y'' là các đạo hàm của y theo x. Hàm $a_0(x)$ không là hàm hằng 0, các hàm $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $b(x)$ thường được giả sử là các hàm liên tục.

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.11** Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng thuần nhất là phương trình có dạng

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (1)$$

trong đó a, b là các hằng số.

Phương trình $k^2 + ak + b = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng của (1). Ta xét các trường hợp sau

Nếu $k^2 + ak + b = 0$ có hai nghiệm phân biệt $k_1 \neq k_2$ thì (1) có nghiệm tổng quát cho bởi công thức

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \text{ } (c_1, c_2 \text{ là những hằng số bất kỳ}).$$

Nếu $k^2 + ak + b = 0$ có nghiệm kép $k_1 = k_2 = k$ thì (1) có nghiệm tổng quát cho bởi công thức

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx} \text{ } (c_1, c_2 \text{ là những hằng số bất kỳ}).$$

Nếu $k^2 + ak + b = 0$ có hai nghiệm phức $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ thì (1) có nghiệm tổng quát dạng

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right)$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.9** Giải các phương trình vi phân

1) $y'' - 2y' - 3y = 0$ 2) $y'' + 6y' + 9y = 0$ 3) $y'' - 2y' + 5y = 0$

Giải.

1) Phương trình đặc trưng của phương trình đã cho là $k^2 - 2k - 3 = 0$. Nó có hai nghiệm $k_1 = -1$, $k_2 = 3$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$.

2) Phương trình đặc trưng $k^2 + 6k + 9 = 0$ có nghiệm kép $k_1 = k_2 = -3$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$y = (c_1 + xc_2)e^{-3x}$.

3) Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 5 = 0$ có hai nghiệm phức $k_{1,2} = 1 \pm 2i$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$y = e^x \left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right)$.

Định nghĩa Error! No text of specified style in document.**.12** Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất là phương trình có dạng

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad (2)$$

trong đó $f(x)$ là hàm số cho trước không đồng nhất bằng 0.

Định lí Error! No text of specified style in document.**.1** *Giả sử* y_R *là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất* (2) *và* y_{TQ} *là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (1), khi đó nghiệm tổng quát của* (2) *là*

$$y = y_{TQ} + y_R.$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.10** Giải phương trình $y'' + y - 2y = -4x$

Giải.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' + y - 2y = 0$ là $y_0 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$. Và một nghiệm riêng của phương trình $y'' + y - 2y = -4x$ là $y_k = 2x + 1$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + 2x + 1.$$

Sau dây là một số phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Trường hợp tổng quát ta dùng phương pháp biến thiên hằng số. Tuy nhiên trong phạm vi chương trình ta chỉ xét trường hợp $f(x)$ có dạng đặc biệt :

Trường hợp 1 : $f\left(x\right)=P_n\left(x\right).e^{ax}$, $P_n\left(x\right)$ là đa thức bậc *n*. Tìm y_r có dạng : $y_r=x^s.e^{ax}.Q_n\left(x\right)$, trong đó:

$s=0$, nếu α không là nghiệm của PT đặc trưng.

$s=1$, nếu α là nghiệm đơn của PT đặc trưng.

$s=2$, nếu α là nghiệm kép của PT đặc trưng.

$Q_n\left(x\right)$ là đa thức cùng bậc $P_n\left(x\right)$ với các hệ số cần tìm

Để tìm các hệ số này, thay y_r vào phương trình $\left(1\right)$

Trường hợp 2: $f\left(x\right)=e^{ax}\left(P_n\left(x\right)\cos\beta x+Q_m\left(x\right)\sin\beta x\right)$. Ta tìm y_r có dạng :

$$y_r=x^s.e^{ax}\left(R_k\left(x\right)\cos\beta x+S_k\left(x\right)\sin\beta x\right).$$

Trong đó,

$s=0$, nếu $\alpha+i\beta$ không là nghiệm của PT đặc trưng.

$s=1$, nếu $\alpha+i\beta$ là nghiệm đơn của PT đặc trưng.

R_k, S_k là 2 đa thức bậc $k=\max\left\{m,n\right\}$ với các hệ số cần tìm.

Để tìm các hệ số này, thay y_r vào phương trình $\left(1\right)$

$$y_r''+py_r'+qy_r=f\left(x\right),$$

vì $\sin x$ và $\cos x$ độc lập tuyến tính nên các hệ số tương ứng bằng nhau.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.11** Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình vi phân

1) $y''+3y'+2y=x^2$ 2) $y''-2y'+y=\cos x$

Giải.

1) Ta thấy $f(x)=x^2$ nên y_R có dạng tổng quát là $y=Ax^2+Bx+C$. Do đó

$y'=2Ax+B,\ y''=2A.$ Thay vào phương trình đã cho ta tìm được $A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{3}{2},\ C=\frac{7}{4}$.

Nên $y_R=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$.

Phương trình thuần nhất tương ứng $y''+3y'+2y=0$ có nghiệm tổng quát là

$$y_0=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}.$$

2) Ta có y_R có dạng tổng quát là $y=A\cos x+B\sin x$ và $y'=-A\sin x+B\cos x$ và

$y'' = -A\cos x - B\sin x$. Thay vào phương trình đã cho ta được $A = 0, B = -\frac{1}{2}$.

Vậy $y_k = -\frac{1}{2}\sin x$.

Kết hợp với nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y_0 = e^x(c_1 + c_2x)$ ta có nghiệm tổng quát cần tìm là

$$y = -\frac{1}{2}\sin x + e^x(c_1 + c_2x).$$

Định lí Error! No text of specified style in document.**.2** *Nếu* y_1, y_2 *lần lượt là hai ngiệm của hai phương trình*

$$y'' + ay' + b = f_1(x),\ y'' + ay' + b = f_2(x)$$

thì hàm $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ *là nghiệm của phương trình:*

$$y'' + ay' + b = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x).$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.12** Giải phương trình vi phân

$y'' + 4y = 10e^x + 16x^2$

Giải.

Phương trình $y'' + 4y = e^x$ có một nghiệm riêng là $y_1 = \frac{1}{5}e^x$. Phương trình $y'' + 4y = x^2$ có một nghiệm riêng là $y_2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$.

Vậy phương trình $y'' + 4y = 10e^x + 16x^2$ có một nghiệm riêng là $y_k = 2e^x + 4x^2 - 2$.

Chú ý: Khi dùng phương pháp hệ số bất định, vấn đề đặt ra là nếu hàm $f(x)$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng thì ta không thể tìm được hệ số của dạng tổng quát. Chẳng hạn, phương trình $y'' + 2y' - 3y = e^x$ có dạng tổng quát của hàm $f(x) = e^x$ là $y = Ae^x$, do $f(x) = e^x$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất nên ta có $0 = e^x$. Vậy không xác định được hệ số A.

3.4 Hai dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp hai giảm cấp được

Dạng $y'' = f(x, y')$

Đặt $y' = p$ ta có $y'' = p'$. Khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình vi phân cấp một: $p' = f(x, p)$

trong đó p là hàm của x. Giải phương trình trên ta được nghiệm $p = p(x, c_1)$ do đó từ $y' = p$ ta có nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \int p(x, c_1)dx + c_2$$

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.13** Giải phương trình $y'' + \frac{y'}{x} = x$

Giải. Đặt $y' = p$ thì $y'' = p'$ ta được phương trình vi phân tuyến tính cấp một $p' + \frac{1}{x}p = x$.

Ta có

$$k(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x} \text{ và } h(x) = \int \frac{xdx}{\frac{1}{x}} + c = \int x^2 dx + c = \frac{x^3}{3} + c.$$

Vậy

$$p = \frac{1}{x}(\frac{x^3}{3} + c) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}.$$

Do đó $y = \int pdx + c_1 = \int (\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x})dx = \frac{x^3}{9} + c\ln|x| + c_1$.

Dạng $y'' = f(y, y')$

Đặt $y' = p$, với *p* là hàm của *y*. Khi đó $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = pp'$ và $pp' = f(y, p)$.

Tích phân hai vế, ta được $p = p(y, c_1)$. Suy ra $\frac{dy}{dx} = p(y, c_1)$. Đây là phương trình tách biến, nên ta viết lại $\frac{dy}{p(y, c_1)} = dx$ suy ra $\int \frac{dy}{p(y, c_1)} = x + c_2$.

Ví dụ Error! No text of specified style in document.**.14** Giải phương trình $2yy'' + (y')^2 = 0$

Giải. Đặt $y' = p \Rightarrow y'' = pp'$ thay vào phương trình đã cho ta được:

$$2ypp' + p^2 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y} \Rightarrow \ln|p| = \ln\left|\frac{c_1}{\sqrt{y}}\right|.$$

Vậy ta có:

$$p = \frac{c_1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \sqrt{y}dy = c_1 dx \Rightarrow \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = c_1 x + c_2 \Rightarrow y = \left(\frac{3}{2}(c_1 x + c_2)\right)^{\frac{2}{3}}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

3.1. Giải phương trình vi phân

a) $\ln\cos y\,dx + xtgy\,dy = 0$

b) $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$

c) $\dfrac{x\,dy}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{y\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

3.2. Giải phương trình vi phân

a) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$

b) $yy' = -\dfrac{2x}{\cos y}$

c) $xyy' = 1 - x^2$

3.3. Giải phương trình vi phân

a) $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0,\ y(1) = 0$

b) $(1+e^{2x})y^2dx = e^x dx,\ y(0) = 0$

c) $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x+2)} = 0,\ y(1) = 1$

3.4. Giải phương trình vi phân

a) $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$

b) $x\sin(\dfrac{x}{y})y' + x = y\sin(\dfrac{y}{x})$

c) $y' = \dfrac{y}{x} + \cos(\dfrac{y}{x})$

3.5. Giải phương trình vi phân

a) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0,\ y(2) = 1$

b) $xy' - y = xtg(\dfrac{y}{x}),\ y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

c) $y' = 4 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2,\ y(1) = 2$

3.6. Giải phương trình vi phân

a) $xy' - y = x^2 \cos x$ b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ d) $y' \cos x + y = 1 - \sin x$

3.7. Giải phương trình vi phân

a) $(1 + x^2)y' + y = arctgx$ b) $y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2(\ln tg\,\frac{x}{2})$ c) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

3.8. Giải phương trình vi phân

a) $y' + \frac{n}{x}y = \frac{1}{x^n},\ y(1) = 0$

b) $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x,\ y(1) = 0$

c) $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x,\ y(e) = 0,5e^2$

3.9. Giải phương trình vi phân

a) $y' - \frac{y}{1 - x^2} - 1 - x = 0,\ y(0) = 0$ b) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$ c) $2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$

3.10. Giải phương trình vi phân

a) $(1 + e^x)yy' = e^x,\ y(0) = 1$

b) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$

c) $y' + 3ytg3x = \sin 6x,\ y(0) = \frac{1}{3}$

3.11. Giải phương trình vi phân

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$ b) $y'' - 2y' + 2y = 0$ c) $y = y'' + y'$

3.12. Giải phương trình vi phân

a) $y'' - y' = 0$ b) $y'' + ky = 0$ c) $\frac{y' - y}{y''} = 3$

3.13. Giải phương trình vi phân

a) $y'' - 5y + 4y = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 8$

b) $y'' + 2y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

c) $y'' + \pi^2 y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$

3.14. Giải phương trình vi phân

a) $y''-4y'+4y=x^2$ b) $y''-y+y=x^3+6$ c) $y''+2y'+y=e^{2x}$

3.15. Giải phương trình vi phân

a) $y''+y=\cos x$ b) $y''+y'-2y=8\sin x$ c) $y''+y'-6y=xe^{2x}$

3.16. Giải phương trình vi phân

a) $y''-2y'+5y=e^x\cos 2x$ b) $y''-7y'+12y=-e^{4x}$ c) $y''-2y'-8y=e^x-8\cos 2x$

3.17. Giải phương trình vi phân

a) $y''-2y'-10y=\sin 3x+e^x$ b) $y''-4y'+4y=2e^{2x}+\frac{x}{2}$ c) $y''-3y'=x+\cos x$

3.18. Giải phương trình vi phân

a) $y''=\frac{1}{x}$ b) $y''=-\frac{1}{2y^3}$ c) $y''=1-(y')^2$

3.19. Giải phương trình vi phân

a) $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0$ b) $y'[1+(y')]=y''$ c) $x^2y''+xy'=1$

3.20. Giải phương trình vi phân

a) $yy''=y^2y'+(y')^2$ b) $yy'-y'(1+y')=0$ c) $(x+1)y''-(x+2)y'+x+2=0$

MỤC LỤC