BỘ MÔN TOÁN TRƯỜNG CAO ĐẲNG CNTT TP HCM

GVC ThS NGUYỄN THỊ MINH THƯ Chủ biên

ThS DƯƠNG THỊ XUÂN AN; ThS NGUYỄN THỊ THU THỦY

GIÁO TRÌNH

TOÁN CAO CẤP A1

PHẦN GIẢI TÍCH

KHỐI KỸ THUẬT

(LƯU HÀNH NỘI BỘ)

TP HỒ CHÍ MINH 2013

Hoan nghênh bạn đọc góp ý phê bình
Chân thành cảm ơn

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu học tập và giảng dạy môn Toán trong trường, Bộ môn Toán Trường Cao Đẳng Công Nghệ Thông Tin TPHCM đã tổ chức biên soạn và ấn hành cuốn TOÁN CAO CẤP dành cho sinh viên khối ngành kỹ thuật.

Cuốn sách do các giảng viên thuộc bộ môn Toán biên soạn, trên cơ sở đề cương môn học theo tín chỉ đã được Hội Đồng Khoa học trường phê duyệt.

Nội dung cuốn sách là phần Giải tích giải quyết hầu hết các vấn đề trọng yếu của môn học, giúp sinh viên có nền tảng về toán để tiếp cận các môn học khác trong chương trình đào tạo hệ cao đẳng khối ngành kỹ thuật. Phần lý thuyết được trình bày logic, ngắn gọn, dễ hiểu, với nhiều ví dụ phù hợp với đối tượng là sinh viên hệ cao đẳng. Ngoài ra, còn có phần cho sinh viên tự nghiên cứu, sau mỗi chương đều có bài tập để sinh viên rèn luyện.

Đây là tài liệu được sử dụng chính thức trong trường giúp sinh viên học tập và thi kết thúc học phần có hiệu quả tốt theo chương trình đào tạo tín chỉ. Trong quá trình giảng dạy, giáo trình sẽ được cập nhật, chỉnh lý để ngày càng hoàn thiện và đầy đủ hơn. Do khả năng có hạn, thời gian ngắn và cũng là lần đầu biên soạn theo hướng đào tạo tín chỉ nên giáo trình không tránh khỏi sai sót.Tập thể giáo viên bộ môn Toán rất mong nhận được các ý kiến góp ý, phê bình của bạn đọc trong và ngoài trường. Các ý kiến góp ý, phê bình của bạn đọc xin gửi về chủ biên: NGUYỄN THỊ MINH THƯ - Trưởng bộ môn TOÁN Trường Cao đẳng Công nghệ Thông tin TP HCM. Địa chỉ minhthu15916@gmail.com

Xin chân thành cảm ơn.

BỘ MÔN TOÁN

PHẦN GIẢI TÍCH

MỤC LỤC

PHẦN GIẢI TÍCH

CHƯƠNG I

GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC CỦA HÀM 1 BIẾN

1. 1 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ THỰC

I. Định nghĩa giới hạn của dãy số thực

1. Các khái niệm cơ bản

a) Dãy số thực: ánh xạ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto x_n$ được gọi là một dãy số thực, gọi tắt là dãy số

Ký hiệu: $\{x_n\}$, (x_n)

VÍ DỤ 1

$$x_n = \left\{\frac{1}{n}\right\},\quad x_n = \left\{\frac{(-1)^n 2n+1}{n^2}\right\},\quad y_n = \{3n+1\}$$

Chú ý: Tuỳ thuộc vào công thức xác định của dãy mà ánh xạ đi từ $\mathbb{N}$ *hay* $\mathbb{N}^*$

b) Dãy con: Dãy $\{x_{n_k}\}$ được gọi là một dãy con của dãy $\{x_n\}$ nếu mỗi phần tử của $\{x_{n_k}\}$ cũng là một phần tử của dãy $\{x_n\}$.

(các phần tử của dãy con được trích ra từ dãy mẹ $\{x_n\}$)

VÍ DỤ 2 Các dãy $\left\{\frac{1}{2n}\right\}, \left\{\frac{1}{3n}\right\}$ là dãy con của dãy $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

c) Dãy tăng là dãy có $x_n < x_{n+1};\ \forall n \in \mathbb{N}$

VÍ DỤ 3 $x_n = \{2n+3\}$ là dãy tăng

d) Dãy giảm là dãy có $x_n > x_{n+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

VÍ DỤ 4 $x_n = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ là dãy giảm

Để kiểm tra một dãy số tăng hay giảm chúng ta có 2 cách:

+ Cách 1

$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ thì dãy tăng; $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ thì dãy giảm nếu $x_n > 0 \forall n$

+ Cách 2

$x_{n+1} - x_n > 0$ thì dãy tăng; $x_{n+1} - x_n < 0$ thì dãy giảm

2. Giới hạn của dãy số

a) Định nghĩa 1

Số L được gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ khi n dần ra vô cùng nếu $\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ thì \ |x_n - L| < \varepsilon$.

Khi đó ta cũng nói dãy $\{x_n\}$ hội tụ về L và viết:

$$x_n \to L \ khi \ n \to \infty; \quad hay \quad x_n \xrightarrow{n\to\infty} L; \quad hay \ \lim_{n\to\infty} x_n = L$$

* Dãy không tồn tại giới hạn, tức là dãy không hội tụ được gọi là dãy phân kỳ

* Dãy có giới hạn là vô hạn $(\pm\infty)$ thì gọi là dãy có giới hạn vô hạn.

Ký hiệu: $x_n \to \pm\infty$ khi $n \to \infty$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$

VÍ DỤ 5 Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2-5} = 0$

Thật vậy

$$\forall \varepsilon > 0, \left|\frac{(-1)^n}{3n^2-5} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3n^2-5} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{3}(\frac{1}{\varepsilon}+5) \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{3}(\frac{1}{\varepsilon}+5)}$$

Như vậy nếu ta đặt $n_0 = \left[\sqrt{\frac{1}{3}(\frac{1}{\varepsilon}+5)}\right] + 1$

thì ta có $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ thì \ |x_n - 0| < \varepsilon$ □

Tương tự ta có

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n}=0;$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+100}{3n^2}=\frac{2}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(n)=+\infty;$ $\lim\limits_{n\to\infty}(-3n^2)=-\infty$

b) Định nghĩa 2 (Giới hạn riêng của dãy)

Mỗi dãy con $\{x_{n_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ nếu có giới hạn thì giới hạn đó được gọi là giới hạn riêng của dãy $\{x_n\}$.

VÍ DỤ 6

Dãy $x_n=\{(-1)^n n\}$ có hai dãy con là $\{2n\}$ và $\{-(2n+1)\}$ thì $\{2n\} \to +\infty\, khi\ n\to\infty$ và $\{-(2n+1)\} \to -\infty\ khi\ n\to -\infty$.

Khi đó $\pm\infty$ được gọi là giới hạn riêng của dãy đã cho

Chú ý: dãy $\{x_n\}$ có hai dãy con dần đến 2 giới hạn khác nhau thì dãy $\{x_n\}$ không tồn tại giới hạn

VÍ DỤ 7 Dãy $x_n=\sin\left(\left[(-1)^n+1\right]\left[\frac{\pi}{4}+n\pi\right]\right)$ có các dãy con là: $x_{2n}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+n2\pi\right)=1$ và $x_{2n+1}=0$. Các dãy con này tương ứng có các giới hạn là 1 và 0, các giới hạn này là các giới hạn riêng của dãy x_n

3. Các tính chất về giới hạn của dãy

ĐỊNH LÝ 1

-Dãy hội tụ thì giới hạn là duy nhất

-Dãy hội tụ thì giới nội (tức tồn tại (a,b) chứa tất cả các giá trị của dãy x_n)

ĐỊNH LÝ 2 (tính tuyến tính của giới hạn)

Cho hai dãy số hội tụ $\{x_n\}\to a$ và $\{y_n\}\to b$ khi $n\to\infty$; $a,b\neq\pm\infty$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+y_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a+b$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(Cx_n\right)=Ca\ \ \forall C\in\mathbb{R}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(C+x_n\right)=C+a\ \ \forall C\in\mathbb{R}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n.y_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n.\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a.b$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\dfrac{1}{a}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{1}{b}\quad\forall x_n,y_n,a,b\neq 0$

i) Nếu $x_n\geq y_n$ thì $a\geq b$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}\quad(b\neq 0)$

ĐỊNH LÝ 3 (giới hạn kẹp)

Cho ba dãy số hội tụ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ thỏa mãn $x_n\leq y_n\leq z_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ và $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$

Ý nghĩa: Việc tính giới hạn dãy $\{y_n\}$ khó thì ta phải kẹp (hay chặn) 2 đầu dãy $\{y_n\}$ bởi dãy $\{x_n\};\{z_n\}$, mà việc tính giới hạn của 2 dãy $\{x_n\};\{z_n\}$ dễ dàng hơn.

VÍ DỤ 8 Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

Ta có

$$\frac{-1}{n}\leq\frac{\sin n}{n}\leq\frac{1}{n}\ \text{ mà }\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\ \text{ nên }\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0.$$

ĐỊNH LÝ 4 Dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ;
Hoặc dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ

VÍ DỤ 9 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}\to 0\ khi\ n\to\infty$

Định nghĩa (dãy Cauchy)

Dãy x_n được gọi là dãy Cauchy nếu với mọi ε >0 cho trước, tìm được $n_0 \in \mathbb{N}^*$ $sao\,cho\,khi\,m,n \geq n_0\;ta\,có\left|x_n - x_m\right| < \varepsilon$

Bổ đề: Dãy Cauchy là dãy giới nội

ĐỊNH LÝ 5 Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy

Điều kiện cần và đủ để dãy số thực hội tụ là dãy Cauchy

4. Số e: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ *và* $e = 2{,}7182818284$

Số e có một vai trị quan trọng trong toán học. Ta gọi lôgarit cơ số e là lôgarit tự nhiên hay lôgarit Napier và $\log_e x$ được viết đơn giản là lnx. Ứng dụng giới hạn số e để tính một số bài tập giới hạn

II. Một số giới hạn cơ bản

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ 1'. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$ 2'. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} = 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p} = 1 \;\; \forall p$ 3'. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \;\; \forall a > 0$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0 \; (\alpha > 0)$ 4'. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^n} = 0$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^\alpha n} = 0$ 5'. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^p}{(1+a)^n} = 0 \;\; \forall p, \forall a > 0$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \;\; \forall |q| < 1$ 6'. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^p n}{n^\alpha} = 0 \;\; \forall p, \forall \alpha > 0$

Chú ý: không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$

Các ví dụ cơ bản

VÍ DỤ 10 Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+5}$

Ta có: $\forall n>5 \Rightarrow n+5<2n \quad \Rightarrow 1<\sqrt[n]{n+5}<\sqrt[n]{2n}$;

vì $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{2}=1 \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+5}=1$

VÍ DỤ 11 Sử dụng định nghĩa chứng minh các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^3+1}\right)=0$

VÍ DỤ 12 Tìm giới hạn

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{(2n+1)\frac{n}{2n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{(2n+1)}\right)^{\frac{n}{2n+1}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{-2}\cdot\frac{-2}{n^2+1}\cdot n^2}=e^{-2}$$

VÍ DỤ 13 Tìm giới hạn

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2-7}\right)^{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{12}{n^2-7}\right)^{\frac{n^2-7}{12}\cdot\frac{12}{n^2-7}\cdot 2n^2}=e^{24}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{2}{n^2-1}\cdot n^2}=e^2$$

1.2 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA HÀM SỐ THỰC

I. Các khái niệm cơ bản về hàm số thực

1. Định nghĩa 1 (Định nghĩa hàm số)

$D, D^* \subseteq \mathbb{R}$, mỗi ánh xạ f từ D vào D^* biến mỗi $x \in$ D thành $y = f(x) \in D^*$ được gọi là hàm số biến số thực (gọi là hàm số)

D: tập xác định; D^*: tập giá trị

VÍ DỤ 1 Các hàm số sau:

$$+ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = 3x + 5$$

$$+ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \frac{5x^2 - 3}{x}$$

$$+ f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$$
$$x \mapsto \sin x$$

$$+ f : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$x \mapsto \arcsin x$$

$$+ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto a^x \quad (0 \neq a > 1)$$

$$+ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log_a x$$

2. Định nghĩa 2 (Đồ thị hàm số)

Đồ thị hàm số là tập những điểm (x, f(x)) trên mặt phẳng toạ độ Oxy, tức là $G = \{(x, f(x)) / x \in D, f(x) \in D^*\}$

Nối tất cả các điểm đó ta sẽ được đường cong, kí hiệu: ***(C)***

3. Các cách cho hàm số

* Cho dạng biểu thức đại số: ví dụ $y = f(x) = 4x^3 + x^2 - 5x + 3$

* Cho dạng đồ thị: trong mặt phẳng *Oxy* cho đừơng cong (C) từ trên đường cong ta xác định mọi điểm *M(x, y)* thì biểu thức liên hệ giữa *y* và *x* chính là hàm số cần tìm.

* Cho hàm số dưới dạng bảng

X	-3	-2	-1	0	1	2	3 …….
Y = f(x)	9	4	1	0	1	4	9

Hàm cần tìm có biểu thức là $f(x) = x^2$

4. Hàm chẵn, hàm lẻ, hàm tuần hoàn, hàm đơn điệu

a) Hàm chẵn

Hàm $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ được gọi là hàm chẵn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x, -x \in D \\ f(x) = f(-x) \end{cases}$$

Đồ thị hàm chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng

b) Hàm lẻ

Hàm $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ được gọi là hàm lẻ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x, -x \in D \\ f(x) = -f(-x) \end{cases}$$

Đồ thị hàm lẻ nhận gốc toạ độ O(0,0) làm tâm đối xứng.

c) Hàm tuần hoàn

Hàm $f : D \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists p \in \mathbb{R}^+, \forall x \in D \\ f(x + p) = f(x) \end{cases}$$

Số p nhỏ nhất có tính chất trên được gọi là chu kỳ của hàm số

Đồ thị của hàm tuần hoàn lặp lại sau 1 chu kỳ

VÍ DỤ 2 Hàm sin*x*, cos*x* là hàm tuần hoàn có chu kỳ 2π.

Hàm tan*x*, cotan*x* là hàm tuần hoàn có chu kỳ π.

d) Hàm đơn điệu

- Hàm số $f : D \to \mathbb{R}$; được gọi là hàm số tăng trên D nếu

$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \le f(x_2)$.

Dấu "=" chỉ xảy ra ở một số hữu hạn điểm.
Hàm số tăng còn gọi là hàm số đồng biến, có đồ thị đi lên từ trái qua phải .
- Hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm số giảm trên D nếu
$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Dấu "=" chỉ xảy ra ở một số hữu hạn điểm.
Hàm số giảm còn gọi là hàm nghịch biến, có đồ thị đi xuống từ trái qua phải.
Hàm số tăng hoặc hàm số giảm thì gọi chung là hàm đơn điệu.
Hàm số chỉ nhận một giá trị được gọi là hàm hằng (hay gọi là hàm dừng).

e) Hàm số hợp

Cho 2 hàm số $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$, hàm hợp của *f* và *g* được xác định và kí hiệu:

$$g_o f : X \to Y \to Z$$
$$x \mapsto y = f(x) \mapsto g(y) = g(f(x)) = g_o f(x)$$

VÍ DỤ 3

$$g_o f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} [-1,1]$$
$$x \mapsto x^2 + 2 \mapsto \sin\left(x^2 + 2\right)$$

và
$$g_o f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} [-1,1]$$
$$x \mapsto x^4 + 3 \mapsto \ln\left(x^4 + 3\right)$$

f) Hàm số ngược và đồ thị của hàm số ngược

Nếu hàm số $f : X \to Y$
$x \mapsto y = f(x)$ là một hàm đơn điệu thì ứng với mỗi phần tử $y \in Y$ có duy nhất một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Khi đó hàm số $g : Y \to X,\ y \mapsto x$ được gọi là hàm số ngược của ánh xạ *f*, và được kí hiệu: f^{-1}.

Vậy: $f^{-1}(y) = x$

VÍ DỤ 4

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto y=3x+1$ $\Rightarrow$ $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y\mapsto x=\dfrac{y-1}{3}$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto y=3^x$ $\Rightarrow$ $f^{-1}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $y\mapsto x=\log_3 y$

- Đồ thị của hàm số ngược f^{-1} (x) đối xứng với đồ thị hàm số f(x) qua tia phân giác thứ nhất

VÍ DỤ 5 Đồ thị hàm y = a^x *và* y = $\log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng y = x

Đồ thị hàm $y = x^2$ *và* $y = \sqrt{x}$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

h) Hàm bị chặn

- Hàm *f(x)* được gọi là bị chặn trên bởi số *M* trên tập *X* nếu $\forall x\in X$ thì $f(x)\le M$.
- Hàm *f(x)* được gọi là bị chặn dưới bởi số *m* trên tập *X* nếu $\forall x\in X$ thì $f(x)\ge m$.

Hàm bị chặn trên và dưới gọi là hàm bị chặn, hay hàm giới nội.

VÍ DỤ 6 *f(x)* = sin*x* bị chặn trên bởi 1 và dưới bởi -1

II. Các hàm sơ cấp

1) Các hàm sơ cấp cơ bản

a) Hàm số hằng: y= c ; c là hằng số.

b) Hàm lũy thừa: y= x^α ; α là một số thực.

Miền xác định của hàm phụ thuộc vào α .

VÍ DỤ 7 Hàm số y=x và y= x^2 xác định với mọi x.

Hàm số y= 1/x xác định với x $\neq 0$.

c) Hàm mũ: y= a^x , điều kiện a>0 và a$\neq$ 1 có miền xác định $(-\infty,+\infty)$; miền giá trị $(0,+\infty)$.

Chú ý: **y= e^x** có miền xác định $(-\infty,+\infty)$; miền giá trị $(0,+\infty)$

d) Hàm logarit: y=$\log_a x$ có miền xác định với mọi x>0; miền giá trị $(-\infty,+\infty)$.

Chú ý**: y=$\log_e x$ = lnx** có miền xác định với mọi x>0; miền giá trị $(-\infty,+\infty)$

e) Các hàm lượng giác: y= sin x; y= cos x; y= tg x ; y= cotg x.

f) Các hàm lượng giác ngược

+ y=arcsinx là hàm ngược của hàm sinx

Hàm y= sin x với $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ là một song ánh từ đoạn $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ lên đoạn [-1,1], nó có một hàm ngược kí hiệu x=arcsiny (nghĩa là x bằng số đo của cung mà sin của nó là y)

Với qui ước x là đối số, y là hàm số thì hàm ngược của hàm y=sinx sẽ là y= arcsinx có miền xác định là đoạn [-1,1].

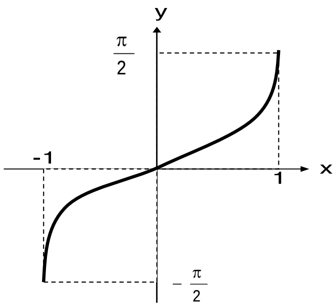
Miền giá trị [-$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$].

Đồ thị của hàm đối xứng với hàm y= sin x qua đường phân giác thứ nhất. Xem hình 1-7.

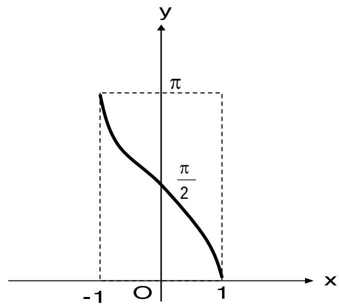
+ y= arccosx là hàm ngược của hàm cosx

Tương tự, hàm y=arccos*x* có miền xác định là [-1,1], miền giá trị là [0, π] là hàm ngược của hàm y= cos x với $0 \le x \le \pi$.

Xem hình 1.8



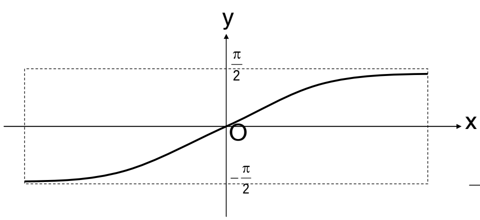
Hình 1-7



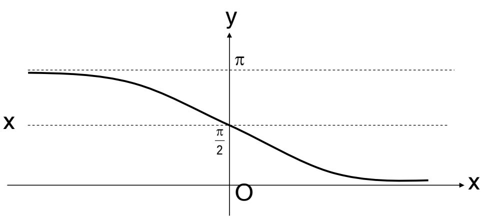
Hình 1-8

+ **y= arctg x** , có miền xác định là R, miền giá trị là $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ là hàm ngược của hàm y= tg x với miền xác định $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$.

Xem hình 1-9



Hình 1-9



Hình 1-10

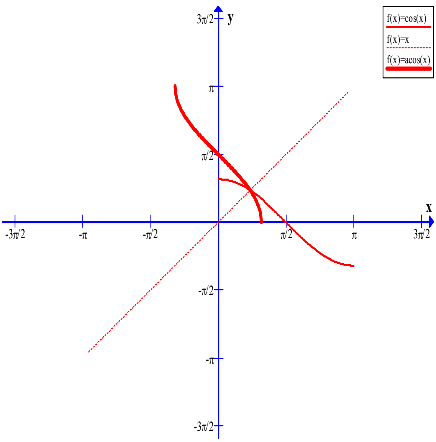
+ **y= arccotg x** , có miền xác định là R, miền giá trị là $(0,\pi)$ là hàm ngược của hàm y= cotg x với miền xác định $(0,\pi)$.

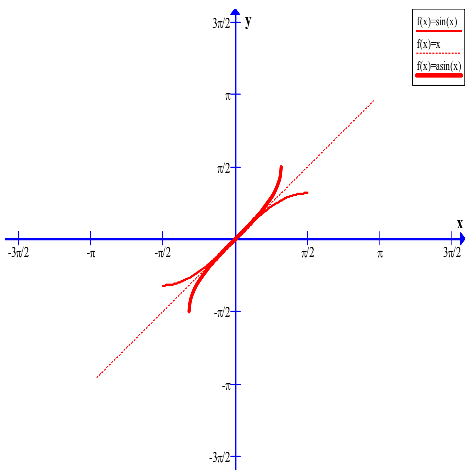
Xem hình 1-10.

2) Hàm số sơ cấp

Các hàm số sơ cấp là các hàm được tạo bởi một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và phép lấy hàm hợp của các hàm sơ cấp cơ bản.

Ví dụ: $f(x) = 5x^2 + \sin x - \text{cotg}x$; $f(x) = \dfrac{5arctg(3x)}{2x} \ldots$





3. Các phép toán về hàm số

Cho 2 hàm số *f(x), g(x),* hàm tổng, hiệu, tích, thương của chúng được
xác định:

$$1/\quad (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$2/\quad fg(x) = f(x)g(x)$$

$$3/\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x / g(x) \neq o$$

Ký hiệu : D_f, D_g lần lượt là miền xác định của *f, g*

$D_f \bigcap D_g$ là miền xác định của tổng, hiệu, tích

4. Đa thức hữu tỷ

Viết $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \qquad (a_n \neq 0)$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad a_n \neq 0$$ Gọi là đa thức bậc n ($n \in \mathbb{N}$)

4. Phân thức hữu tỷ

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{b_o + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m} \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{i=0}^{m} b_i x^i}$$

Gọi là một phân thức hữu tỷ

VÍ DỤ $\quad f(x) = 5x^5 + 4x^3 - 6x^2 + 7 \quad ; \quad f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x}.$

1.3 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. Các khái niệm cơ bản về giới hạn của hàm số

1. Định nghĩa 1

a) (Theo ngôn ngữ dãy): Cho hàm *f(x)* xác định ở lân cận x_0 , có thể không xác định tại x_0 . Nếu mọi dãy x_n hội tụ về x_0 , dãy hàm tương ứng $f(x_n)$ đều hội tụ về L, thì ta nói L là giới hạn của hàm $f(x)$ khi x dần về x_0.

b) (Theo $(\varepsilon - \delta)$): Cho hàm f(x) xác định ở lân cận x_0 , có thể không xác định tại x_0 . Số L được gọi là giới hạn của hàm f(x) khi x dần về x_0 nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$

Ký hiệu có 3 cách sau

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L; \quad f(x) \to L \ \ khi\, x \to x_0; \qquad f(x) \xrightarrow{x \to x_0} L$$

VÍ DỤ 1 $\lim\limits_{x \to 0} x \cos x = 0; \quad \lim\limits_{x \to 0}(3x + 1) = 1$

2. *Định nghĩa 2* (Giới hạn bằng vô cực và giới hạn tại vô cực)

a) Giới hạn bằng vô cực

*(Theo ngôn ngữ dãy)

Cho hàm *f(x)* xác định ở lân cận x_0 , có thể không xác định tại x_0 . Nếu mọi dãy x_n hội tụ về x_0 , dãy hàm tương ứng $f(x_n)$ đều hội tụ về $\pm\infty$, thì ta nói giới hạn của hàm *f(x)* bằng vô cùng khi x dần về x_0.

Ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

*(Theo $(\varepsilon - \delta)$)

Nếu mọi số dương ***M*** lớn tuỳ ý, tồn tại $\delta > 0 : |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x)| > M$

b) Giới hạn tại vô cực

Hàm *f(x)* có giới hạn là L khi *x* dần về $\pm\infty$ được gọi là giới hạn tại vô cực của hàm *f(x)*.

Ký hiệu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L; \quad f(x) \to L\, khi\, x \to \pm\infty$

3. Định nghĩa (Giới hạn một phía)

Định nghĩa giới hạn phải tại x_0 : $\lim\limits_{x \to x_o^+} f(x) = a$ nếu $x \geq x_0$

Định nghĩa giới hạn trái tại x_0: $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = a$ nếu $x \leq x_0$

Định lý (Điều kiện tồn tại giới hạn)

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \lim_{x \to x_o^+} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

4. Các tính chất và phép toán của hàm có giới hạn

Định lý 1 Giới hạn của hàm số (nếu có) là duy nhất

Định lý 2 (Tính tuyến tính của giới hạn)

Nếu tồn tại hai giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$ $(a, b \neq \pm\infty)$ thì ta có

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \pm b$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[Cf(x) \right] = C \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = Ca$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x). \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a.b$

d) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{a}{b}, \ (b \neq 0)$

Định lý 3 (Định lý giới hạn kẹp)

Giả sử ba hàm số $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ thỏa mãn

$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall x \in D$. Khi đó, nếu:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$

II. Vô cùng bé (VCB)và vô cùng lớn (VCL)

1. Định nghĩa

a) f(x) là một vô cùng bé nếu f(x) có giới hạn bằng 0 khi $x \to x_0 \, hay \, x \to \infty$

VÍ DỤ $x;\ \sin x;\ tgx;\ \ldots$ là các vô cùng bé khi $x \to 0$;

$\frac{1}{x}$ là vô cùng bé khi $x \to \infty$

b) f(x) là một vô cùng lớn nếu f(x) có giới hạn bằng $+\infty$

VÍ DỤ $x,\ a^x\ (a > 1);\ \ln x;\ \ldots$ là các vô cùng lớn khi $x \to +\infty$

$\frac{1}{x}$ là vô cùng lớn khi $x \to 0$

2. Tính chất của vô cùng bé, vô cùng lớn

a) Tính chất 1: Tổng ,tích các vô cùng bé cùng quá trình là một vô cùng bé

VÍ DỤ $x;\ \sin x;\ tgx$ là các vô cùng bé khi $x \to 0$ thì

x+ sinx+tgx là một vô cùng bé khi $x \to 0$;

x. sinx.tgx là một vô cùng bé khi $x \to 0$

b) Tính chất 2: Tích của một vô cùng bé và một đại lượng bị chặn là một vô cùng bé

VÍ DỤ 1 a) Tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ =? b) Tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}$ =?

BÀI GIẢI

a) Vì $\dfrac{1}{x}$ là vô cùng bé khi $x \to \infty$; sinx, cosx là hàm bị chặn nên theo tính chất 2 ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}.\sin x = 0;$

b) Tương tự $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}.\cos x = 0;$

c) Tính chất 3: Tổng, tích các vô cùng lớn cùng một quá trình là một vô cùng lớn

VÍ DỤ $x,\ a^x\left(a>1\right);\ \ln x;$ là các vô cùng lớn khi $x \to +\infty$ thì $x + a^x + \ln x$ là vô cùng lớn khi $x \to +\infty$; $x.a^x.\ \ln x$ là vô cùng lớn khi $x \to +\infty$

d) Tính chất 4: Tổng của một vô cùng lớn và một đại lượng bị chặn là một vô cùng lớn

VÍ DỤ $\dfrac{1}{x}$ là vô cùng lớn khi $x \to 0$; sinx là hàm bị chặn nên $\dfrac{1}{x}$ + sinx là vô cùng lớn khi $x \to 0$

e) Tính chất 5: $\alpha(x)$ là vô cùng bé và $\alpha(x) \neq 0$ thì $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ là vô cùng lớn

f) Tính chất 6: $\alpha(x)$ là vô cùng lớn thì $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ là vô cùng bé

g) Tính chất 7: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$,trong đó $\alpha(x)$ là vô cùng bé khi $x \to x_o$

3. So sánh 2 vô cùng bé

a) Định nghĩa: f(x) và g(x) được gọi là hai vô cùng bé cùng bậc

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \text{ với } k \text{ là hằng số } (0 < k < +\infty)$$

Đặc biệt: - Nếu k = 0 thì f(x) gọi là vô cùng bé bậc cao hơn g(x) khi $x \to x_o$ Ký hiệu : f(x)=0(g(x))

- Nếu $k = +\infty$ thì f(x) là vô cùng bé bậc thấp hơn g(x)
- Nếu k = 1 thì gọi là 2 vô cùng bé tương đương khi $x \to x_o$

Ký hiệu: $f(x) \sim g(x)\ khi\ x \to x_0$

VÍ DỤ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1; \Rightarrow \sin x \sim x\ \ khi\ \ x \to 0$

Chúng ta chú ý nhiều về khái niệm này để áp dụng giải 1 số các bài tập giới hạn. Ta muốn tính giới hạn nào đó thì có nhiều khi chúng ta chỉ việc thay những vô cùng bé tương đương mà thôi

b) Định lý: Nếu f(x), g(x), $\overline{f(x)}, \overline{g(x)}$ là những VCB trong cùng quá trình $x \to x_0$ và $f(x) \sim \overline{f(x)},\ g(x) \sim \overline{g(x)}$ thì

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\overline{f(x)}}{\overline{g(x)}}$$

VÍ DỤ 2 Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x^2} = ?$

BÀI GIẢI

Vì $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} \sim 2.(\dfrac{x}{2})^2 = \dfrac{x^2}{2}$; $\sin x^2 \sim x^2$

Nên $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

c) Qui tắc ngắt bỏ vô cùng bé bậc cao

Nếu f(x) là tổng của những vô cùng bé cùng quá trình ở tử số và g(x) là tổng của những vô cùng bé cùng quá trình đó ở mẫu số thì trong quá trình ấy $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Trong đó: $f_1(x)$ là VCB bậc thấp nhất ở tử số

$g_1(x)$ là VCB bậc thấp nhất ở mẫu số

VÍ DỤ 3

Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x+\sin^2 x}{x+tg^3 x} = ?$

BÀI GIẢI

Vì 4x là VCB bậc thấp nhất ở tử số và x là VCB bậc thấp nhất ở mẫu số nên

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x+\sin^2 x}{x+tg^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x}=4$$

III. Khử các giới hạn dạng vô định

Sau đây là một số giới hạn cơ bản thường dùng

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$ $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;$

$\lim_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x}=1;$ $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1;$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$ $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e;$

4. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e;$ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty;$ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0;$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^\alpha}=\infty;\ \alpha>0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0;\alpha>0$

Từ đó ta có một số vô cùng bé tương đương

*Khi $x \to 0$ thì $\sin x \sim x$; $tgx \sim x$; $arc\sin x \sim x$;

$arctgx \sim x$; $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$; $\ln(1+x) \sim x$;

$e^x - 1 \sim x$; $\sqrt[k]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{k}x$

1. Khử dạng $\frac{0}{0}$

- Nếu giới hạn có chứa căn thức bậc 2 hoặc bậc 3 ta phải dùng biểu thức liên hợp (hoặc phải thêm bớt rồi tách ra và dùng biểu thức liên hợp cho từng phần)

VÍ DỤ 4 $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{2(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)} = \frac{4}{3}$

- Nếu là giới hạn chứa đa thức ta phải phân tích thành nhân tử có chứa thừa số $(x\text{-}x_0)$

VÍ DỤ 5 $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x^3 - a^3} = \lim\limits_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \frac{4a}{3}$

- Biến đổi giới hạn đã cho đưa về sử dụng công thức giới hạn cơ bản:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;

Từ đó ta cũng có công thức hệ quả: với u=u(x)

$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1;\quad \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1;\quad \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\frac{m}{n};\qquad \lim_{x\to -a}\frac{\sin(x+a)}{x+a}=1$$

Chú ý rằng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x}$

VÍ DỤ 6 Tính các giới hạn sau bằng cách đưa về áp dụng công thức giới hạn cơ bản

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{4x}.\dfrac{4x}{2x}=1.2=2$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x}-1}{\sin 3x}.\dfrac{\sin 3x}{2x}=1.\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

VÍ DỤ 7 Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)+(1-\cos 3x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{x}{2}\right)^2+2\left(\frac{3x}{2}\right)^2}{x^2}=4$$

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\cos a$

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}.2}=-\sin a$

d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos 2x+1-\cos 2x}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\cos 2x+\frac{(1-\cos 2x)}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos 2x+\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)}{(2x)^2}.4.\frac{x^2}{1-\cos x}=1+\frac{4}{2}.2=5$$

VÍ DỤ 8 Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln(2x+1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2x+1)}{2x}.\dfrac{2x}{x^2}=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to 0}x\ln\dfrac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\dfrac{1}{x})}{\dfrac{1}{x}}=1$

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\dfrac{x}{a}}{x-a}.$

Đặt t=x-a thì x=t+a $\Rightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{t+a}{a}=1+\dfrac{t}{a}$ và $x\to a$ thì $t\to 0$

nên $I=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+\dfrac{t}{a})}{\dfrac{t}{a}.a}=\dfrac{1}{a}$

2. Khử dạng $(\infty - \infty)$

Ta cũng phải nhân biểu thức liên hợp, hoặc có thể phải đổi biến số rồi nhân liên hợp

VÍ DỤ 9 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{tgx}\right) = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x} = 0$

3. Khử dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Ta có thể chia cả tử và mẫu cho vô cùng lớn bậc cao nhất nếu là phân thức hữu tỷ

VÍ DỤ 10 $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{x^3+4x^2+x}{2x^3+3x+5} = \lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{x^3}{2x^3} = \dfrac{1}{2}$

4. Khử dạng 1^∞

Ta biến đổi áp dụng 2 giới hạn sau

$\lim\limits_{x \to \infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$; $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; e=2,718182848…

Tổng quát với u=u(x) thì $\lim\limits_{u \to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$;

VÍ DỤ 11 Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1 - \dfrac{2}{x^2+1}\right)^{-\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{-2}{x^2+1}\cdot x^2} = e^{-2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{3x}} = \lim\limits_{x \to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{3x}} = e^{\frac{1}{3}}$

c)

$$\lim_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}((1+(-\sin^2 x))^{-\frac{1}{\sin^2 x}})^{\frac{-\sin^2 x}{\sin x}} = e^0 = 1;$$

$$\text{d)} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}} = \frac{e^1}{e} = 1$$

$$\text{e)} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}((1+(\sin x-1))^{\frac{1}{\sin x-1}})^{\frac{(\sin x-1)\sin x}{\cos x}} = e^0 = 1.$$

Vì

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x\frac{\sin\ x-1}{\cos x}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}})$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x\frac{-(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x\frac{-(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}} = 0$$

$$\text{f)} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\sin^3 x}\ln\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)}$$

$$\text{mà } \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^3 x}\ln\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{tgx-\sin x}{1+\sin x}\right)}{\frac{tgx-\sin x}{1+\sin x}}\frac{tgx-\sin x}{1+\sin x}.\frac{1}{\sin^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{tgx-\sin x}{1+\sin x}\right)}{\dfrac{tgx-\sin x}{1+\sin x}}\frac{1}{1+\sin x}\cdot\frac{x^3}{\sin^3 x}\cdot\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$$

$$vây\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}=e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

VÍ DỤ 12 Sử dụng vô cùng bé tương đương, tính các giới hạn sau

a) $A=\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{6x^2}=\dfrac{1}{3}$

Vì khi $x\to 0$ ta có $\ln(1+2x^2)\sim 2x^2$

b) B= $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+tgx)}{x+\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$

Vì khi $x\to 0$ thì x, sinx, tgx là các vô cùng bé nên ta có

$\ln(1+tgx)\sim tgx\sim x$ và $x+\sin^3 x\sim x$

c) $B=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{arctg2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$

Vì khi $x\to 0$ thì $e^{5x}-1\sim 5x$ và $arctg2x\sim 2x$

VÍ DỤ 13

$$\lim_{x\to o}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to o}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to o}\frac{x.\dfrac{x^2}{2}}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}$$

1.4. TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM MỘT BIẾN SỐ

I. Các khái niệm cơ bản

1. Định nghĩa 1 (Hàm liên tục tại 1 điểm)

Hàm *f(x)* liên tục tại x_0 nếu thoả 2 điều kiện

- *f(x) xác định tại x_0 và trong lân cận của x_0*
- $f(x) \to f(x_0) \, khi \; x \to x_0$

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Nếu đặt $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ và $\Delta x = x - x_0$ thì

$\Delta f(x) \to 0 \; khi \; \Delta x \to 0$

Điểm x_0 được gọi là điểm liên tục của của hàm *f(x).*

2. Định nghĩa 2 (Hàm liên tục trái)

Hàm *f(x)* liên tục trái tại x_0 nếu thoả 2 điều kiện

a) f(x) xác định tại x_0 và trong lân cận bên trái của x_0

b) $f(x) \to f(x_0)$ khi $x \to x_0^-$

Ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

3. Định nghĩa 3 (Hàm liên tục phải)

Hàm *f(x)* liên tục phải tại x_0 nếu thoả 2 điều kiện:

a) f(x) xác định tại x_0 và trong lân cận bên phải của x_0

b) $f(x) \to f(x_0)$ khi $x \to x_0^+$

Ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Định lý (liên hệ giữa liên tục trái, liên tục phải và liên tục tại x_0)

f(x) liên tục tại x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

4. Định nghĩa 4 Hàm *f(x)* liên tục trên (a, b) nếu và chỉ nếu hàm liên tục tại mọi điểm thuộc (a,b)

Ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \;\; \forall x \in (a,b)$

5. Định nghĩa 5 Hàm *f(x)* liên tục trên [a, b] nếu và chỉ nếu hàm liên tục tại mọi điểm thuộc (a, b) và liên tục trái tại b, liên tục phải tại a.

Ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in [a,b]$

Định lý (Tính liên tục của các hàm sơ cấp)

Mọi hàm sơ cấp liên tục trên toàn bộ tập xác định của nó.

6. Tính chất

a) Tính tuyến tính của hàm liên tục

Hàm *f(x) và g(x)* liên tục tại x_0 thì hàm tổng, hiệu, tích, thương ($g(x_0) \neq 0$) cũng là hàm liên tục.

b) Tính chất của hàm liên tục

- *f(x)* liên tục trên [a, b] thì bị chặn trên đoạn này. Tức là tồn tại $m \in \mathbb{R}$ *sao cho* $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$
- *f(x)* liên tục trên [a, b] thì đạt GTNN, GTLN trên [a, b], và mọi giá trị trung gian giữa *m* và *M*.
- *f(x)* liên tục trên [a, b] và $f(a).f(b) < 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm trong (a, b).

7. Ý nghĩa: Hàm *f(x)* liên tục trên (a, b) thì đồ thị của nó là đường cong liền nét từ *A(a, f(a))* tới *B(b, f(b))*.

II. Điểm gián đoạn

1. Định nghĩa

Nếu *f(x)* không liên tục tại x_0 , thì ta nói x_0 là điểm gián đoạn của hàm *f(x)*. Nếu *f(x)* gián đoạn tại x_0 thì đồ thị hàm không liền nét mà bị tách thành 2 phần tại điểm có hoành độ là x_0 .

2. Nhận dạng điểm gián đoạn

Hàm *f(x)* gián đoạn tại x_0 nếu một trong các trường hợp sau xảy ra

a) *f(x)* không xác định tại x_0

VÍ DỤ 1 $\dfrac{\sin x}{x}, e^{\frac{1}{x}}, \dfrac{2x+3}{x}, \ldots$ là các hàm gián đoạn tại $x_0 = 0$.

b) Hàm có giới hạn khi x dần tới x_0 nhưng giới hạn đó không bằng $f(x_0)$

VÍ DỤ 2 Xét sự liên tục của hàm tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & khi\ x \neq 0 \\ 3 & khix = 0 \end{cases}$$

BÀI GIẢI

Ta có: $f(0) = 3$ nên hàm số xác định tại $x = 0$ và lân cận của $x = 0$.

Và $\lim\limits_{x \to o} f(x) = \lim\limits_{x \to o} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 3$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x = 0$.

c) Hàm không có giới hạn khi x dần tới x_0 vì giới hạn 2 phía không bằng nhau

VÍ DỤ 3 Xét sự liên tục của hàm số:

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 1 + \cos \mathrm{x} & \text{khi} \quad \mathrm{x} > \pi \\ 0 & \text{khi} \quad \mathrm{x} = \pi \\ 1 - \mathrm{x}^2 & \text{khi} \quad \mathrm{x} < \pi \end{cases}$$

Đáp số: hàm số gián đoạn tại $x = \pi$

d) Hàm không có giới hạn khi x dần tới x_0

VÍ DỤ 4 $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & khi\ x \neq 0 \\ 3 & khi\ x = o \end{cases}$ gián đoạn tại $x = 0$.

Vì $\lim\limits_{\mathrm{x} \to 0} \sin \dfrac{1}{\mathrm{x}}$ không có giới hạn

3. Phân loại điểm gián đoạn

Điểm gián đoạn của hàm được phân thành 2 loại: loại bỏ được và loại không bỏ được

a) Loại bỏ được còn gọi là gián đoạn loại 1, đó là giới hạn trái khác giới hạn phải. Trường hợp này nếu chúng ta sử dụng bước nhảy thì đồ thị sẽ liên tục.

b) Loại không bỏ được còn gọi là gián đoạn loại 2, đó là hàm không xác định hoặc không tồn tại giới hạn của hàm khi x dần tới x_0 . . .

VÍ DỤ 5

Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} -2\sin x & , \text{ khi } x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & , \text{ khi } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & , \text{ khi } x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số liên tục trên R.

Đáp số: a= -1 và b=1

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1 Tìm các giới hạn hàm số sau

$a)\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x^3-a^3}$ b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{a^2}}{x-a}$

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-|a|}{x-a^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x\sqrt[3]{x}-3x+7}{x\sqrt[3]{x}+2x-1}$

1.2 Tìm các giới hạn

$a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 8x}$

$c)\lim\limits_{x\to 1}(1-x).\tan\dfrac{\pi x}{2}$ $d)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$

$e)\lim\limits_{x\to\infty}x.\sin\dfrac{1}{x}$ $f)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

$g)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin x^2}$ $h)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

1.3 Tính các giới hạn sau

$a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x+\sin 2x}{\tan 4x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\tan x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan x)+\sqrt{1+2x}-1}{x^2+\arcsin 2x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$ $h)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{2x}$

1.4 Tìm các giới hạn

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{3x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{2x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\tan x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$

1.5 Xét tính liên tục của các hàm số:

a) $f\left(x\right)=\begin{cases} ax^2 & \text{khi } x\le 2 \\ 0 & \text{khi } x>2 \end{cases}$ tại $x_0=2$

b) $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x\ne 2 \\ a & \text{khi } x=2 \end{cases}$ tại $x_0=2$

c) $f\left(x\right)=\begin{cases} e^x & \text{khi } x<0 \\ x+a & \text{khi } x\ge 0 \end{cases}$ tại $x_0=0$

d) $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2\sin^2 x & \text{khi } x\ne 0 \\ a & \text{khi } x=0 \end{cases}$ tại $x_0=0$

e) $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2+\ln\left(1+2x\right)}{\sin x} & \text{khi } x\ne 0 \\ a+\sin x & \text{khi } x=0 \end{cases}$ tại $x_0=0$

CHƯƠNG II

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

2.1. ĐẠO HÀM

I. Định nghĩa đạo hàm

1. Định nghĩa đạo hàm tại x_0

Cho hàm y = f(x) xác định trên (a,b), $x_0 \in (a,b)$. Cho x_0 số gia Δx sao cho $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ và gọi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là số gia của hàm số ứng với số gia Δx của đối số.

Nếu tồn tại $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ và hữu hạn thì giới hạn đó là đạo hàm của hàm f(x) tại x_0 và hàm f(x) gọi là có đạo hàm tại x_0. Ta ký hiệu

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. Định nghĩa đạo hàm một phía

- Nếu chỉ tồn tại $\lim\limits_{\Delta x \to o^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ và hữu hạn thì giới hạn đó là đạo hàm bên phải của hàm f(x) tại x_0.

Ký hiệu $f'(x_0^+) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

- Tương tự $f'(x_0^-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ thì giới hạn đó là đạo hàm bên trái của hàm f(x) tại x_0.

3. Các định lý

Định lý 1

Hàm có đạo hàm tại một điểm khi và chỉ khi hàm số có đạo hàm bên phải và bên trái tại điểm đó và chúng bằng nhau.

Định lý 2

Hàm số f(x) có đạo hàm tại x_0 thì liên tục tại x_0.

VÍ DỤ Hàm f(x) = $|x|$ liên tục trên R.

Ta có $f'(0^-) = -1$, $f'(0^+) = 1$, nên f(x=0) không có đạo hàm.

II. Các qui tắc tính đạo hàm

1. Các định lý về phép tính đạo hàm

Định lý 3

Nếu u= u(x) và v=v(x) là các hàm có đạo hàm tại x thì tổng, hiệu, tích, thương (v(x) $\neq$ 0) cũng có đạo hàm tại x và

i) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

ii) $(u.v)' = u'v + v'u$; $(cu)' = cu'$; c=const

iii) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$; $\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{-cv'}{v^2}$; $\left(\frac{1}{c}u\right)' = \frac{1}{c}u'$

Định lý 4

Cho hàm y = f(x) liên tục và đồng biến (hoặc nghịch biến) trong khoảng (a, b). Nếu f(x) có đạo hàm tại điểm

$x_0 \in (a, b)$ và $f'(x_0) \neq 0$ thì hàm ngược $x = \varphi(y)$ của $f(x)$ cũng có

đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và $\varphi'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Định lý 5 (đạo hàm hàm hợp)

Cho hàm $y = f(u); u=u(x)$ thì $y'=f'(u).u'(x)$.

2. Các công thức tính đạo hàm

Theo các định lý 3 và 4, để tìm đạo hàm một hàm sơ cấp bất kỳ ta chỉ cần biết đạo hàm của các hàm sơ cấp cơ bản, đó là các công thức sau đây

$c' = 0$, c là hằng số;	$u=u(x)$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;	$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1.}$
$(a^x)' = a^x \ln a$;	$(a^u)' = u' a^u \ln a$,
$(e^x)' = e^x$;	$(e^u)' = u' e^u$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$;
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;
$(\sin x)' = \cos x$;	$(\sin u)' = u' \cos u$;
$(\cos x)' = -\sin x$;	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;	$(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;
$(cotgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;	$(cotgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

$(acr\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(acr\sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$,

$(acrtgx)' = \frac{1}{1+x^2}$; $(acrtgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$;

$(arc\cot gx)' = -\frac{1}{1+x^2}$. $(arc\cot gu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

VÍ DỤ 1 Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = (2x + 3)^{10}$.

Ta có $y' = 10(2x + 3)^9.2$ hay $y' = 20(2x + 3)^9$.

b) Dạng $y = u^v$

Ta có $y = e^{vlnu}$ thì $y' = e^{vlnu}(vlnu)'$

Chẳng hạn: $y = x^x$. Ta có $y = e^{xlnx}$ thì $y' = e^{xlnx}(xlnx)'$.

Vậy $y' = x^x(lnx + 1)$.

Chú ý: Đối với một số hàm:

a) $f(x) = u(x)^{v(x)}$

b) *f(x)* là hàm tích, thương của nhiều hàm số, hoặc là những hàm hợp phức tạp. Muốn tính đạo hàm chúng ta phải lấy ln của hàm đó.

VÍ DỤ 2 Tìm y' biết $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$ $\forall x \in [0,1] \cup (2,+\infty)$

Lấy ln hai vế và sử dụng các tính chất của hàm logarit ta có:

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\left(\ln x + \ln|x-1| - \ln|x-2|\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x^2 - 4x + 2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}.$$

VÍ DỤ 3 Tìm y' của các hàm số

a) $y = x^{x^2} \quad \forall x > 0$

Lấy ln hai vế $\Rightarrow \ln y = x^2 \ln x \Rightarrow y' = y\left(2x\ln x + x^2\frac{1}{x}\right)$

hay $y' = x^{x^2}\left(2x\ln x + x\right)$

b) $y = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}$ tại những điểm mà hàm tồn tại

Lấy ln hai vế

$$\ln y = tgx \ln\sin x \Rightarrow y' = y\left((1+tg^2x)\ln\sin x + tgx\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

hay $y' = \sin x^{tgx}\left((1+tg^2x)\ln\sin x + tgx\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

III. Đạo hàm cấp cao

1. *Định nghĩa*

Cho hàm y = f(x). Nếu f(x) có đạo hàm với mọi x ∈ (a,b) thì f(x) cũng là một hàm trên (a,b). Khi đó, nếu f'(x) có đạo hàm trên (a,b) thì ta gọi (f'(x))' là đạo hàm cấp hai của hàm f(x) và ký hiệu là f''(x).

Đạo hàm cấp n của f(x) ký hiệu là $f^{(n)}(x)$.

Theo định nghĩa ta có $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$.

Ta quy ước $f^{(0)}(x) = f(x)$.

2. Công thức tính đạo hàm cấp cao

i) $(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$

$$ii)\ (f(x).g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Công thức (ii) thường gọi là công thức Leibnitz

VÍ DỤ 7 Tính đạo hàm cấp cao cho các hàm số sau

$$a)\ y = e^x \Rightarrow y' = e^x,\ y'' = e^x, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y^{(n)} = e^x$$

$$b)\ y = e^{ax} \Rightarrow y' = ae^{ax},\ y'' = a^2 e^{ax}, \ldots\ldots\ldots\ldots y^{(n)} = a^n e^{ax}$$

c) $y = \sin x$

$$\Rightarrow y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x = (-1)^1 \sin x$$

$$y^{(3)} = -\cos x = (-1)^1 \cos x \Rightarrow y^{(4)} = \sin x = (-1)^2 \sin x$$

....

$$y^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x \qquad\qquad y^{(2k)} = (-1)^k \sin x$$

$$Cách 2: y' = \cos x = \sin\left(x + 1.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = \cos\left(x + 1.\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$$

....

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$d)$ $y = \cos x \Rightarrow y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

e) $y = \dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

$$y^{(n)} = (-1)(-1)(-2)(-1)(-3)...(-n)(-1)(1-x)^{-1-n}$$

$$= (-1)^{2n} n!.(1-x)^{-1-n} = \frac{n!}{(1-x)^{1+n}}$$

f) $y = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$$\Rightarrow y^{(n)} = (-1)(-2)(-3).........(-n)(1+x)^{-1-n}$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{1+n}}$$

g) Áp dụng tính

$$y = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right)$$

VÍ DỤ 8: Tính đạo hàm cấp 100 cho hàm số sau

$y = x^2 \sin x$

$$y^{(100)} = x^2 \sin^{(100)} x + 100.2x.\sin^{(99)} x + \frac{100.99}{2!} 2\sin^{(98)} x + 0$$

$$= x^2 \sin\left(x + 100\frac{\pi}{2}\right) + 200x\sin\left(x + 99\frac{\pi}{2}\right) + 9900\sin\left(x + 98\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= x^2 \sin x - 200x\cos x - 9900\sin x$$

VÍ DỤ 9 Tính đạo hàm cấp cao cho các hàm số sau

a) $y = \dfrac{x^3}{x-1} \Rightarrow y^{(7)} = ?$

$$y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}; (x^2 + x + 1)^{(7)} = 0$$

$$y^{(7)} = [(x-1)^{-1}]^{(7)} = (-1)^7 7!(x-1)^{-8}$$

b) $y = \dfrac{x^2}{1-x} \Rightarrow y^{(8)} = ?$

$$y = \frac{x^2 - 1 + 1}{1-x} = -(x+1) - (x-1)^{-1}$$

$$y^{(8)} = 0 - [(x-1)^{-1}]^{(8)} = (-1)^8 8!(x-1)^{-9}$$

c) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y^{(100)} = ?$

$$y = \frac{1+x \ \ -1+1}{\sqrt{1-x}} = 2(1-x)^{\frac{-1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y^{(100)} = \frac{(199)!!}{2^{99}}[(1-x)^{-\frac{2001}{2}}] + \frac{(197)!!}{2^{100}}[(1-x)^{-\frac{199}{2}}$$

d) $y = \dfrac{1}{1-x^2} \Rightarrow y^{(1996)}(0) = ?$

$$y=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x})=\frac{1}{2}[(1-x)^{-1}+(1+x)^{-1}]$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}[n!(1-x)^{-(n+1)}+(-1)^{n}n!(1+x)^{-1(n+1)}]$$

$$y^{(1996)}(0)=\frac{1996!}{2}[\frac{1}{1}+\frac{1}{1}]=1996!$$

e) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}\Rightarrow y^{(1993)}(0)=?$

$$y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1})=(x-2)^{-1}-(x-1)^{-1}$$

$$y^{(n)}=[(-1)^{n}n!(x-2)^{-(n+1)}-(-1)^{n}n!(x-1)^{-(n+1)}]$$

$$y^{(1993)}(0)=1993![\frac{1}{(-2)^{1994}}-\frac{1}{(-1)^{1994}}]$$

f) $y=\ln(1+x)\Rightarrow y^{(n)}(x)=?$

$$y'=\frac{1}{x+1}=(x+1)^{-1};\ y''=-1(x+1)^{-2}$$

$$y'''=(-1)(-2)(x+1)^{-3}$$

$$y^{(n)}=[(-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-(n)}]$$

g) $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow y^{(1996)}(2)=?$

$$y=\ln(x+1)-\ln(x-1)$$

$$y'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$$

$$y^{(n)}=[(-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-(n)}-(-1)^{n-1}(n-1)!(x-1)^{-(n)}]$$

$$y^{(1996)}(2)=(-1)^{1995}1995![\frac{1}{3^{1996}}-1]$$

2.2. VI PHÂN

I. Định nghĩa vi phân cấp 1

Cho hàm y = f(x) xác định trên (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Ta gọi f(x) là khả vi tại x_0 nếu có thể viết $\triangle y = A.\triangle x + o(\triangle x)$, trong đó A là một hằng số, $o(\triangle x)$ và VCB cấp cao hơn $\triangle x$ thì biểu thức $dy = A.\triangle x$ gọi là vi phân của hàm f(x) tại x_0.

Từ định nghĩa ta thấy ngay rằng, với $\triangle x$ bé thì $dy \approx \triangle y$

II. Các công thức tính vi phân

1. Định lý (Mối liên hệ giữa đạo hàm và vi phân)

Hàm y = f(x) khả vi tại x_0 khi và chỉ khi f(x) có đạo hàm tại x_0 và $dy = f'(x_0)\triangle x$.

2. Các tính chất của vi phân cấp 1

Định lý: Cho f(x) và g(x) là các hàm khả vi tại x.

Khi đó các hàm $f(x) \pm g(x)$, f(x).g(x) và $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ cũng khả vi tại x và

i) $d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x)$

ii) $d(f(x).g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$

iii) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$.

3. Tính bất biến của biểu thức vi phân cấp 1

Cho f = f(u) thì df = f'(u).du.

Nếu u = u(x) lại là một hàm của x: f = f(u(x)) thì

df = $(f_0u)'(x)dx = f'(u(x)).u'(x)dx$ vì $u'(x)dx = du$ nên ta lại có

df =f'(u)du. Như vậy dù u là biến độc lập hay biến phụ thuộc

thì ta vẫn có df =f'(u)du.

4. Tính gần đúng giá trị của hàm bằng vi phân.

Từ $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ và $dy = f'(x_0)\,\triangle x$

Ta có dy ≈ △y, do đó $f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\triangle x$ với độ chính xác là o(△x), một VCB cấp cao hơn △x.

VÍ DỤ 1 Tính gần đúng ln(1,01)

BÀI GIẢI

Ln(1,01)=ln(1+0,01)

Xét f(x) = ln(x) thì $f'(x) = \frac{1}{x}$. Với $x_0 = 1$, $\triangle x = 0{,}01$ ta có

$$\ln(1,01) \approx \ln 1 + 1.0,01 = 0 + 1,01 = 1,01$$

VÍ DỤ 2 Tính gần đúng $\sqrt[3]{7} = ?$

BÀI GIẢI

$$\sqrt[3]{7} = 2\sqrt[3]{1 - \frac{1}{8}}$$

Xét $f(x) = \sqrt[3]{x}$ thì $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. với $x_0 = 1$, $\triangle x = -1/8$

Từ đó $\sqrt[3]{7} \approx 2\left[\sqrt[3]{1} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}\right)\right] = \frac{23}{12}.$

III. Vi phân cấp cao

Cho y = f(x) là hàm khả vi trên (a,b).

Biểu thức dy = y’(x)△x gọi là vi phân cấp một của hàm y = f(x). Hàm này phụ thuộc vào hai biến độc lập x và △x. Tuy nhiên nếu cố định △x, nó trở thành hàm của một biến x. Nếu hàm này khả vi trên (a,b) thì vi phân d(dy) của nó gọi là vi phân cấp hai của hàm y = f(x), ký hiệu là d^2y.

Như vậy $d^2y = d(y'\Delta x) = (y'\Delta x)'\Delta x = y''(\Delta x)^2$.

Bởi vì dx =△x nên $d^2y = y''dx^2$

Tổng quát nếu y khả vi cấp n trên (a,b), ta có thể xác định $d^n y = y^{(n)}dx^n$.

Vì hệ thức này nên đạo hàm cấp n còn có thể viết $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$,

chẳng hạn $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$,....

Vi phân cấp cao không có dạng thức bất biến như vi phân cấp một.

VÍ DỤ 3 Tính vi phân cấp 3 cho hàm y=tgx

BÀI GIẢI

Ta có công thức tính vi phân cấp 3 là $d^3y = y'''dx^3$

$y' = 1 + tg^2x;$

$$y'' = 2tgx(1+tg^2x) = 2tg^3x + 2tgx$$

$$y''' = 6tg^2x(1+tg^2x) + 2(1+tg^2x) = 6tg^4x + 8tg^2x + 2$$
$$d^3y = (6tg^4x + 8tg^2x + 2)dx^3$$

VÍ DỤ 4   Tính vi phân cấp 3 cho hàm y= xlnx+cos3x

BÀI GIẢI

$$y' = \ln x + x\frac{1}{x} - 3\sin 3x = \ln x + 1 - 3\sin 3x;$$

$$y'' = \frac{1}{x} - 9\cos 3x;$$

$$y''' = \frac{-1}{x^2} + 27\sin 3x;$$

$d^3y = y'''dx^3$ nên

$$d^3y = (\frac{-1}{x^2} + 27\sin 3x)dx^3$$

2.3. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

I. Định nghĩa cực trị

Cho hàm y = f(x) xác định trên (a, b). Điểm $x_0 \in (a, b)$ gọi là điểm cực đại (cực tiểu) địa phương của hàm y = f(x) trên (a, b) nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho $B_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ để mọi $x \in B_\delta(x_0)$ thì $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). Điểm x_0 mà tại đó f(x) đạt cực đại hay cực tiểu gọi là điểm cực trị.

II. Các định lý về giá trị trung bình

1. Định lý Fermat

Nếu hàm y = f(x) đạt cực trị tại x_0 và tại đó hàm số có đạo hàm thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý Fermat thường gọi là điều kiện cần để có cực trị. Bây giờ ta phát biểu ba định lý thường gọi là các định lý về giá trị trung bình.

2. Định lý Rolle

Cho hàm y = f(x) liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b) và f(a) = f(b). Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho f'(c) = 0.

3. Định lý Lagrange

Cho hàm y = f(x) liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b). Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Công thức sau đây gọi là công thức số gia giới nội $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\ 0<\theta<1.$

Nếu f'(x) = 0 với mọi x $\in$ (a,b) thì theo công thức số gia giới nội, với mọi x, $x_0 \in$ (a,b):

$$f(x)-f(x_0)=f'(x+\theta(x-x_0))\Delta x=0$$

Do đó f(x) = f(x_0), tức là f(x) là hàm hằng.

Vậy ta có: f(x) là hàm hằng khi và chỉ khi f'(x) = 0.

4. Định lý Cauchy

Cho các hàm f(x) và g(x) liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b) và g'(x) $\neq$ 0 với mọi x $\in$ (a,b).Khi đó tồn tại c $\in$ (a,b):

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Dễ dàng kiểm tra φ(x)= $f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý ,do đó tồn tại c $\in$ (a,b) để φ'(c) = 0.

Khi đó

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0 \ hay \quad \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

***Chú ý*: Nếu đặt g(x) = x trong định lý Cauchy ta nhận được định lý Lagrange. Nếu thêm giả thiết f(a) = f(b) trong định lý Lagrange ta nhận được định lý Rolle.

VÍ DỤ Chứng minh bất đẳng thức: $\ln(1+x) < x,\ \forall x > 0$

BÀI GIẢI

$$\ln(1+x) < x\, khi\, x > 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x < 0\ khi\, x > 0$$

Xét hàm $f(x) = \ln(1+x) - x\ khi\, x > 0$.

Ta có hàm f(x) là hàm liên tục và có đạo hàm

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1$ trên đoạn [0,x].

Áp dụng định lý Lagrange ta có:f(x)-f(0)=(x-0)f'(c) với c thuộc (0,x)

$$\Rightarrow \ln(1+x) - x = x\left(\frac{1}{1+c} - 1\right) = -x\frac{c}{1+c}$$

vì x>0 và c>0 nên $-x\dfrac{c}{1+c} < 0$. Vậy $\ln(1+x) - x < 0$.

Ta có điều cần chứng minh.

2.4. CÔNG THỨC TAYLOR

I. Công thức Taylor và công thức Maclaurin

1. Định lý

Cho f(x) liên tục trên [a,b], có đạo hàm đến cấp (n + 1) trên khoảng (a,b), $x_0 \in$ (a,b). Khi đó với mọi $x \in$ [a,b], ta có:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

trong đó c là một số nằm giữa x_0 và x.

Ta gọi $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ là đa thức Taylor bậc n của hàm f(x) tại lân cận của điểm x_0 và

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ là phần dư của công thức Taylor.

Chú ý: Ta có thể viết công thức Taylor dưới dạng

$$f(x_0 + h) = P_n(x_0 + h) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, \text{ trong đó } 0 < \theta < 1.$$

Khi n = 1, công thức Taylor chính là định lý Lagrange.

Phần dư $R_n(h) = \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$ gọi là phần dư của công thức Taylor dưới dạng Lagrange.

Phần dư $R_n(x) = 0((x - x_0)^n)$ gọi là phần dư của công thức Taylor dưới dạng Peano.

VÍ DỤ 1

Khai triển Taylor cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$ tại $x_0=1$ tới số hạng bậc 3.

BÀI GIẢI

Ta có:

$$f\left(x\right)=\sqrt[3]{x} \qquad \Rightarrow \quad f\left(1\right)=1$$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad f'\left(1\right)=\frac{1}{3}.1^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}.$$

$$f''\left(x\right)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad f''\left(1\right)=-\frac{2}{9}.1^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9}.$$

$$f^{(3)}\left(x\right)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad f^{(3)}\left(1\right)=\frac{10}{27}.$$

$$f^{(4)}\left(x\right)=-\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad f^{(4)}\left(1\right)=-\frac{80}{81}.$$

Vậy:

$$f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$$

$$=\left[\begin{array}{l} \underbrace{1+\frac{1}{3}.\frac{1}{1!}\left(x-1\right)-\frac{2}{9}.\frac{1}{2!}\left(x-1\right)^2+\frac{10}{27}.\frac{1}{3!}\left(x-1\right)^3}_{\text{phần chính}}\underbrace{-\frac{80}{81}.\frac{\left(\alpha\right)^{-\frac{11}{3}}}{4!}\left(x-1\right)^4}_{\text{phần dư }(L)} \\ \underbrace{1+\frac{1}{3}.\frac{1}{1!}\left(x-1\right)-\frac{2}{9}.\frac{1}{2!}\left(x-1\right)^2+\frac{10}{27}.\frac{1}{3!}\left(x-1\right)^3}_{\text{phần chính}}+\underbrace{o\left(x-1\right)^3}_{\text{phần dư }(P)} \end{array}\right.$$

Trong đó α là một số nằm giữa *x* và 1.

2) Công thức Maclaurin

Khi $x_0 = 0$, công thức Taylor còn gọi là công thức Maclaurin có phần dư của công thức dưới dạng Lagrange là

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}; \quad c \in (0, x)$$

Công thức Maclaurin có phần dư dưới dạng Peano là

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + 0(x^n)$$

3. Khai triển Maclaurin một số hàm cơ bản

i) ***Khai triển của hàm*** $f(x) = e^x$

Ta có $f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = 1$

....

$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

$f^{(n+1)}(x) = e^x$

Đặt vào công thức ***Maclaurin ta có khai triển của hàm*** $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1;$$

ii) ***Khai triển của hàm*** $f(x)=\sin x$ Ta có

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \text{ hoặc } \begin{cases} y^{(2k+1)}=(-1)^k\cos x \\ y^{(2k)}=(-1)^k\sin x \end{cases}$$

$f(x)=\sin(x)$

$$=\underbrace{\sin x_0}_{\text{số hạng thứ nhất}}+\underbrace{\frac{\cos x_0}{1!}x}_{\text{s.h thứ 2}}-\underbrace{\frac{\sin x_0}{2!}x^2}_{\text{s.h thứ 3}}-\underbrace{\frac{\cos x_0}{3!}x^3}_{\text{s.h thứ 4}}+\frac{\sin x_0}{4!}x^4+\frac{\cos x_0}{5!}x^5-\ldots$$

Do đó, khi khai triển hàm $\sin x$ tại $x_0=0$ Ta có

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$
$$+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x,\quad 0<\theta<1;$$

iii)Khai triển của hàm $f(x)=\cos x$

Tương tự ta có

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}$$
$$+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos\theta x,\quad 0<\theta<1;$$

iv) ***Khai triển của hàm*** $f(x)=\ln(1+x)$

Ta có

$$f(x)=\ln(1+x)\Rightarrow \qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}=(x+1)^{-1}\Rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x)=-1(x+1)^{-2}\Rightarrow f''(0)=-1$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3} \Rightarrow f'''(0) = 2$$

....

$$f^{(n)}(x) = [(-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-(n)}] \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Đặt vào công thức ***Maclaurin ta có khai triển của hàm ln(1+x)***

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$+(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}(1+\theta x)^{-n+1},\ 0<\theta<1;$$

v) ***Khai triển của hàm*** $f(x) = (1+x)^\alpha$

Ta có $f(x) = (1+x)^\alpha \Rightarrow f(0) = 1^\alpha = 1$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \Rightarrow f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

....

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)$$

Đặt vào công thức ***Maclaurin ta có khai triển của hàm***

$f(x) = (1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n},\ 0<\theta<1.$$

Chú ý:

a) Trong công thức khai triển trên, nếu đề bài yêu cầu khai triển 6 số hạng đầu thì ta khai triển tới bậc 5 của *x*. Nhưng nếu đề bài yêu cầu khai triển tới số hạng bậc 7 thì đó chính là số hạng thứ 8.

b) Đề bài yêu cầu khai triển 1 hàm số nào đó thành hàm đa thức thì ta chỉ cần dùng công thức Maclaurin cho những thành phần nào mà chưa có dạng đa thức.

VÍ DỤ 2 Tìm khai triển Maclaurin của $f(x)=(3x^2+1)\sin 2x$ đến bậc 5.

BÀI GIẢI

Ta có: $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5) \Rightarrow$

$$\sin 2x = 2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^5)=2x-\frac{8x^3}{3!}+\frac{32x^5}{5!}+o(x^5)$$

Do đó, $f(x)=(3x^2+1)\left(2x-\frac{8x^3}{3!}+\frac{32x^5}{5!}+o(x^5)\right)$

$$=2x-\frac{14}{3}x^3-\frac{56}{15}x^5+o(x^5)$$

c) Ngoài ra luôn luôn phải đưa về dạng chuẩn để sử dụng khai triển của những hàm cơ bản đã biết.

VÍ DỤ 3 $f(x)=(x^2+3x)\sin^2 x$ thì ta phải đưa về

$$f(x)=(x^2+3x)\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)$$

d) Có thể ta cần tách 1 hàm số thành nhiều hàm số cơ bản

VÍ DỤ 4 Khai triển $y=f(x)=\frac{\ln(x+1}{1+x}$ đến số hạng bậc 4.

BÀI GIẢI Ta có: $y=f(x)=\frac{\ln(x+1)}{1+x}=\ln(x+1).\left[(1+x)^{-1}\right]$

Ta biết: $\ln\left(x+1\right)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+\theta\left(x^4\right)$

Và $\dfrac{1}{x+1}=\left(x+1\right)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4+\theta\left(x^4\right)$

Vậy:

$$f\left(x\right)=\ln(x+1).\left[\left(1+x\right)^{-1}\right]$$

$$=\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\theta\left(x^4\right)\right]\left[1-x+x^2-x^3+x^4+\theta\left(x^4\right)\right]$$

$$=x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{25}{12}x^4+\theta\left(x^4\right)$$

II. Ứng dụng của công thức Taylor và Maclaurin

1. Tính gần đúng giá trị của hàm

Ta dùng các khai triển để tính xấp xỉ giá trị của hàm f(x) sau khi chọn n đủ lớn để phần dư $R_n(x)$ có trị tuyệt đối không vượt quá sai số cho phép

VÍ DỤ 5 Lập công thức gần đúng số e=?

BÀI GIẢI

Từ $\mathrm{e}^{\mathrm{x}}=1+\mathrm{x}+\dfrac{\mathrm{x}^2}{2!}+...+\dfrac{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}+\dfrac{\mathrm{x}^{\mathrm{n}+1}}{(\mathrm{n}+1)!}\mathrm{e}^{\theta\mathrm{x}},\quad 0<\theta<1;$

Khi x=1 ta có $e=1+1+\dfrac{1}{2!}+...+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{e^{\theta}}{(n+1)!}$ .Công thức này cho ta tính e với độ chính xác không vượt quá $\dfrac{e}{(n+1)!}$.

VÍ DỤ 6 Lập công thức gần đúng sinx khi $|x| \le \frac{\pi}{4}$ với độ chính xác 0,0001.

BÀI GIẢI

Từ công thức $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

$$+(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos\theta x, \quad 0 < \theta < 1;$$

Khi $|x| \le \frac{\pi}{4}$ bởi vì $|R_{2k}| \le \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Nên ta cần tìm k để $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1} \le 0,0001\ (2k+1)!$.

Ta thấy ngay rằng, nếu k ≥ 3 thì điều kiện đó thỏa mãn với độ chính xác 0,0001.Vậy $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

VÍ DỤ 7 Tính gần đúng ln(1,5) với sai số nhỏ hơn 0,01.

BÀI GIẢI

Ta có $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$$+(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}(1+\theta x)^{-n+1}, \ 0 < \theta < 1;$$

Với sai số nhỏ hơn 0,01 ta chỉ lấy

$$:\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 0(x^3)$$

Nên $\ln(1,5) = \ln(1+0,5) \approx 0,5 - \frac{(0,5)^2}{2} + \frac{(0,5)^3}{3} = 0,4$

2. Tính giới hạn

VÍ DỤ 8 Tìm $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - x\sin x - e^{-x^z}}{x^2 \sin^2 x}$

BÀI GIẢI

Ta có khai triển Maclaurin của các hàm:

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots$$

$$x\sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \ldots$$

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

Ta dùng qui tắc ngắt bỏ VCB bậc cao giữ lại VCB bậc thấp

Do đó: $\cos(x^2) - x\sin x - e^{-x^2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^4 + 0(x^5)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - x\sin x - e^{-x^2}}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{6}x^4 + 0(x^5)}{x^2 \sin^2 x} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{6} + \frac{0(x^5)}{x^4}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = -\frac{5}{6}.$$

2.5. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

I. Quy tắc L'Hospital (Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$ *hoặc* $\frac{\infty}{\infty}$.)

Định lý 1 (Quy tắc L'Hospital 1)

Giả sử hàm $f(x); g(x)$ xác định, khả vi tại lân cận $x = a(a \in \mathbb{R})$, có thể trừ tại điểm a. Nếu

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0;\ g'(x) \neq 0 \text{ tại lân cận } x = a$$

$$\text{và } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \text{thì} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Định lý 2 (Quy tắc L'Hospital 2)

Giả sử hàm $f(x); g(x)$ xác định, khả vi tại lân cận $x = a(a \in \mathbb{R})$, có thể trừ tại điểm a. Nếu

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty;\ g'(x) \neq 0 \text{ tại lân cận } x = a$$

$$\text{và } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \text{thì} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Chú ý:

a) Quy tắc L'Hospital chỉ có chiều thuận $(\Rightarrow)$ không có chiều ngược lại: tồn tại $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ không suy ra $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

VÍ DỤ 1 Theo tính chất của VCB ta có $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$

nhưng không $\exists \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{1}$

b) Nếu hàm *f, g* thoả mãn giả thiết định lý và $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ vẫn còn dạng $\frac{0}{0}$ *hoặc* $\frac{\infty}{\infty}$, và *f', g'* thoả mãn giả thiết định lý thì ta tiếp tục dùng quy tắc L'Hospital.

VÍ DỤ 2

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}=6$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{artg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-1\right)'}{\left(artg2x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}}{\frac{1}{1+4x^2}.2}=\frac{3}{2}$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^3}=0$$

II. Tìm cực trị

Cho hàm y = f(x) liên tục trên (a,b). Theo định lý Fermat hàm chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm có f '(x) = 0. Điểm như vậy gọi là điểm nghi ngờ có cực trị.

Nếu f '(x_0) = 0 thì x_0 còn gọi là điểm dừng.

Định lý 1 Cho hàm y = f(x) liên tục trên (a,b), khả vi trên (a,b) điểm $x_0 \in$ (a,b) là một điểm dừng.

Khi đó: a) Nếu *x* biến thiên qua x_0 mà f '(x) đổi dấu từ (-) sang (+) thì x_0 là điểm cực tiểu;

b) Nếu *x* biến thiên qua x_0 mà f '(x) đổi dấu từ (+) sang (-) thì x_0 là điểm cực đại;

c) Nếu *x* biến thiên qua x_0 mà f '(x) không đổi dấu thì x_0 không là điểm cực trị;

Định lý 2 Cho hàm y = f(x) khả vi đến cấp 2 trên (a,b) tại $x_0 \in$ (a,b) có $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$.

Khi đó nếu : a) $f''(x_0) > 0$ thì x_o là điểm cực tiểu

b) $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại

Như vậy muốn tìm cực trị của hàm số y= f(x) có 2 cách:

Cách 1: Dùng đạo hàm cấp 1

Bước 1: Tính f '(x)

Bước 2: Giải phương trình f '(x) = 0 để tìm điểm dừng x_o

Bước 3: Lập bảng xét dấu x_o

a) Nếu x biến thiên qua x_0 mà f '(x) đổi dấu từ (-) sang (+) thì x_0 là điểm cực tiểu;

b) Nếu f '(x) đổi dấu từ (+) sang (-) thì x_0 là điểm cực đại;

c) Nếu f '(x) không đổi dấu thì x_0 không là điểm cực trị

Cách 2: Dùng đạo hàm cấp 2

Bước 1: Tính f '(x)

Bước 2: Giải phương trình f '(x) = 0 tìm điểm dừng x_o

Bước 3: Tính đạo hàm cấp 2

a) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì x_o là điểm cực tiểu.

b) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại

Sau này khi tìm cực trị của các hàm số ta sử dụng cách thứ 2 là chủ yếu.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

2.1. Tính dạo hàm cấp 1 của các hàm số sau

a) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ b) $y = \arctan x - \dfrac{1}{1+x^2}$

c) $y = x + x^x$ d) $y = x^{x^2}$

e) $y = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|$ f) $y = \ln(\ln x)$

2.2. Áp dụng vi phân cấp 1 để tính gần đúng các giá trị sau

a) $A = \lg 11$ b) $B = \tan 46^0$

c) $C = \arctan 0,97$ d) $D = \sqrt[3]{1,02}$

2.3. Cho hàm số $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$

Tìm 3 số hạng đầu tiên của khai triển Taylor tại $x_0 = 1$.

Áp dụng để tính $f(1,003) = ?$

2.4. Tìm khai triển Maclaurin của các hàm số sau đến cấp được chỉ ra:

a) $f(x) = \ln(4+x)$ đến số hạng x^4

b) $f(x) = e^{\sin x}$ đến số hạng x^3

c) $f(x) = e^{\cos x}$ đến số hạng x^3

d) $f(x) = x\ln(3-2x)$ đến số hạng x^4

e) $f(x) = e^{-2x}$ đến số hạng x^n

f) $f(x) = \ln(1+3x)$ đến số hạng x^n

g) $f(x) = (2x^2-1)\cos 2x$ đến số hạng x^n

h) $f(x) = (2x+1)\sin 2x$ đến cấp n

i) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ đến cấp n

j) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ đến cấp n

2.5. Dùng quy tắc L'Hospital để tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\sin 2x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-\sin 4x}{x^3}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$

h) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{2x}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos x}{x^2}$ m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\tan x}$ q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

r) $\lim\limits_{x\to 0^+}x.\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{Lp}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}x=0.$

s) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot gx-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.\cos x-x}{x.x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\overset{Lp}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=0.$$

CHƯƠNG III
TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN SỐ

3.1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

I. Nguyên hàm và định nghĩa tích phân bất định

1. Định nghĩa nguyên hàm

Hàm $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên miền D $\overset{def}{\Leftrightarrow} F'(x) = f(x), \forall x \in D$.

Chú ý: Họ hàm $F(x) + C, \ \forall C = const$ cũng là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên miền D.

VÍ DỤ 1

Cho hàm $f(x) = x^2$, họ các nguyên hàm là $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$.

Định lý

Mọi hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn [a, b] thì có nguyên hàm trên đoạn đó.

2. Định nghĩa tích phân bất định

Tích phân bất định của hàm $f(x)$ trên D là $F(x) + C, \ \forall C = const$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$.

Ký hiệu là $\int f(x)dx = F(x) + C \overset{def}{\Leftrightarrow} F'(x) = f(x)$.

3. Các tính chất của tích phân bất định

$TC1: \quad \int f'(x)dx = f(x) \quad hay \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$

$TC2: \quad \int dF(x) = F(x) \qquad và \qquad \int f(x)dx = F(x) + C$

$TC3: \quad \int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$

$TC4: \quad \int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

$TC5: \quad \int f(x)dx = \int f(t)dt$

$TC6: \quad \int f(u)du = F(u) + c; với\, u = u(x)$

4. Bảng các tích phân cơ bản

1) $\int adx = ax + c$ 1') $\int adu = au + c$; u=u(x)

2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{(1+\alpha)} + c$ 2') $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{1+\alpha} + c$

3) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln x + c$ 3') $\int \dfrac{1}{u}du = \ln u + c$

4) $\int e^{x}dx = e^{x} + c$ 4') $\int e^{u}du = e^{u} + c$;

5) $\int \sin xdx = -\cos x + c$ 5') $\int \sin udu = -\cos u + c$

6) $\int \cos xdx = \sin x + c$ 6') $\int \cos udu = \sin u + c$

7) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + c$ 7') $\int \dfrac{1}{\cos^2 u}du = tgu + c$

8) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ 8') $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$

9) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$ 9') $\int \dfrac{du}{1+u^2} = arctgu + c$

10) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + c$ 10') $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\dfrac{u}{2}\right| + c$

11) $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4})\right| + c$ 11') $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|tg(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4})\right| + c$

$12)\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$ $\quad 12')\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + c$

$13)\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + c$ $\quad 13')\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot gu + c$

$14)\int e^{\alpha x}dx = \alpha^{-1}e^{\alpha x} + c$ $\quad 15)\int \sin axdx = -\frac{\cos ax}{a} + c$

$16)\int \cos axdx = \frac{\sin ax}{a} + c$

$17)\int \frac{dx}{\left(x^2-a^2\right)} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

II. Các phương pháp tính tích phân bất định

1) Phương pháp đổi biến số

* *Nếu* $x=\varphi(t)$, $\varphi(t)$ *là hàm khả vi đơn điệu thì*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi(t)dt$$

* *Nếu đặt* $t=\psi(x)$, $\psi(x)$ *là hàm khả vi, khi đó*

$$\int f(\psi(x)).\psi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

VÍ DỤ 2 Tính tích phân sau: $I = \int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

BÀI GIẢI

Đặt $t=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x=t^3 \Rightarrow dx = 3t^2dt$ *và* $\sqrt[3]{x^2} = t^2$

$$I = \int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{3t^2.\sin t}{t^2}dt$$

$$= 3\int \sin tdt = -3\cos t + C = -3\cos\sqrt[3]{x} + C$$

2) Phương pháp tích phân từng phần

Định lý

Nếu $u(x); v(x)$ là các hàm khả vi thì khi đó

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Chú ý: Khi sử dụng tích phân từng phần chúng ta nên biến đổi trực tiếp chọn u, v sao cho dễ tìm.

VÍ DỤ 3 Tính $I = \int e^{3x}\sin 2x dx$

$$\begin{cases} u = e^{3x} \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3e^{3x}dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$$

$$\text{I} = -\frac{1}{2}\left[e^{3x}\cos 2x - \int 3e^{3x}\cos 2x dx\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{3x}\cos 2x - \frac{3}{2}\int e^{3x} d\sin 2x\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{3x}\cos 2x - \frac{3}{2}\left(e^{3x}\sin 2x - 3\int e^{3x}\sin 2x dx\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x - \frac{9}{4}\underbrace{\int e^{3x}.\sin 2x dx}_{I}$$

Vậy: $$\left(1 + \frac{9}{4}\right)I = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{13}e^{3x}\left(-2\cos 2x + 3\sin 2x\right) + C'$$

VÍ DỤ 4 Tính $I = \int arctgx dx$

$$I = \int \underbrace{arctgx}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x.arctgx - \int x d\left(arctgx\right)$$

$$= x.arctgx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = x.arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}$$

$$= x.arctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Chú ý: Có các dạng để sử dụng công thức tích phân từng phần sau

a) $$\int \underbrace{P\left(x\right)}_{u} . \underbrace{\left| \begin{array}{l} \sin\left(ax+b\right) \\ \cos\left(ax+b\right) \\ e^{ax+b} \end{array} \right. . dx}_{dv}$$

b) $$\int \underbrace{P\left(x\right)}_{v'} . \underbrace{\left| \begin{array}{l} \ln\left(ax+b\right) \\ arctgx;\ \ arc\cot gx \\ \arcsin x;\ \arccos x \end{array} \right.}_{u} . dx$$

trong đó $P\left(x\right)$ là hàm đa thức hoặc hàm mũ.

VÍ DỤ 5 Tính trong trường hợp tổng quát

a) $I = \int e^{ax} \sin bx dx$ *và* $J = \int e^{ax} \cos bx dx$

b) $I = \int \sin\left(\ln x\right) dx$ *và* $J = \int \cos\left(\ln x\right) dx$

Đáp số

a) $I = \int e^{ax}\sin bx dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right) + C$

và $J = \int e^{ax}\cos bx dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\sin bx + a\cos bx\right) + C$

b) $I = \int \underbrace{\sin\left(\ln x\right)}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = \dfrac{x}{2}\left[\sin\left(\ln x\right) - \cos\left(\ln x\right)\right] + C$

và $J = \int \cos\left(\ln x\right)dx = \dfrac{x}{2}\left[\sin\left(\ln x\right) + \cos\left(\ln x\right)\right] + C$

III. Tích phân một số hàm sơ cấp

1. Tích phân các hàm phân thức hữu tỷ

Cho hàm phân thức $f\left(x\right) = \dfrac{P_n\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}$ là hàm phân thức thực sự nếu n < m, là hàm phân thức không thực sự nếu m $\geq$ n.

Dạng I: $\int \dfrac{A}{x-a}dx = A\ln\left|x-a\right| + C$

DạngII:

$$\int \frac{A}{\left(x-a\right)^m}dx = A\int \frac{1}{\left(x-a\right)^m}dx = A\int \left(x-a\right)^{-m}dx$$

$$= \frac{A\left(x-a\right)^{1-m}}{1-m} + C \quad \left(\forall m \neq 1\right)$$

Dạng III Tính $\int \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}dx \quad \left(\Delta = p^2 - 4q < 0\right)$

Ta biến đổi như sau:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

$$\text{Đặt}: \begin{cases} t = x + \dfrac{p}{2} \Rightarrow x = t - \dfrac{p}{2} \quad \text{và } dx = dt \\ a^2 = q - \dfrac{p^2}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}dt$$

$$= \int \frac{Mt}{t^2+a^2}dt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\int \frac{dt^2}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}.arctg\frac{t}{a} + C$$

Vậy

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)}dx$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}.arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Định lý

Mọi đa thức bậc n với hệ số thực

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ $(a_n \neq 0)$ luôn luôn phân tích được thành tích các thừa số là nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai không có nghiệm thực (trong đó có thể có những thừa số trùng nhau). Nghĩa là:

$$P_n(x) = a_n(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+px+q)^{\theta}\ldots(\alpha+\beta+\ldots+\theta=n)$$

Khi đó mọi hàm phân thức $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ có thể phân tích được thành tổng của những phân thức tối giản.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^{\theta}} + \ldots$$

Việc lấy tích phân ở vế trái thì ta đưa về việc lấy tổng các tích phân của các phân thức tối giản ở vế phải.

VÍ DỤ 6 Tính $I = \int \dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+3)}dx$

BÀI GIẢI

Ta có

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (3A+3B-C)x + (3A-3B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+3)}$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ 3A+3B-C=0 \\ 3A-3B-D=1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{8} \qquad B=-\dfrac{1}{8} \\ C=0 \qquad D=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy

$$I = \frac{1}{8}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+3}$$

$$= \frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{1}{4\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

VÍ DỤ 7 Tính $I = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$

BÀI GIẢI

Ta có

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x+3)}$$

Đáp số $A = \frac{1}{2}$ $B = \frac{3}{8}$ $C = \frac{5}{32}$ $D = -\frac{5}{32}$

Vậy

$$I = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+1)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{5}{32}\int \frac{dx}{(x-1)} - \frac{5}{32}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= -\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C.$$

2. Tích phân các hàm lượng giác

Dạng I: Lấy tích phân của hàm $f(x) = R(\sin x; \cos x)$ là hàm hữu tỷ theo sin và cos thì phương pháp chung đặt

$$t = tg\frac{x}{2} \qquad (-\pi < x < \pi) \Rightarrow dx = d(2arctgt) = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Các công thức lượng giác cần nhớ

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;$$

VÍ DỤ 8 Tính $I = \int \frac{dx}{\sin x}$ *và* $J = \int \frac{dx}{\cos x}$

BÀI GIẢI

Đặt $t = tg\frac{x}{2} \qquad (-\pi < x < \pi)$

$$\Rightarrow dx = d(2arctgt) = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \text{và} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}.\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Tương tự

$$J = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$$

VÍ DỤ 9 Tính $I = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$

Ta đặt

$$t = tg\frac{x}{2} \qquad (-\pi < x < \pi) \Rightarrow dx = d(2arctgt) = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$I=\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$$

$$=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{4.\frac{2t}{1+t^2}+3.\frac{\left(1-t^2\right)}{1+t^2}+5}dt=\int\frac{2}{2t^2+8t+8}dt$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t+2\right)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

Trường hợp đặc biệt

- Nếu hàm $f\left(x\right)=R\left(\sin x;\cos x\right)$ lẻ theo hàm cosx thì đặt $t=\sin x$
- Nếu hàm $f\left(x\right)=R\left(\sin x;\cos x\right)$ lẻ theo hàm sinx thì đặt $t=\cos x$
- Nếu hàm $f\left(x\right)=R\left(\sin x;\cos x\right)$ chẵn theo hàm sinx; cosx thì đặt

$$t=tgx \quad hoặc \quad t=\cot gx$$

VÍ DỤ 10 Tính $I=\int\sin^2 x\cos^3 xdx$.

BÀI GIẢI

Ta nhận thấy hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ đối với cosx nên ta đặt: $t=\sin x\Rightarrow x=\arcsin t\Rightarrow dx=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Suy ra

$$I=\int\sin^2 x\cos^3 xdx=\int t^2\left(1-t^2\right)dt=\int\left(t^2-t^4\right)dt$$

$$=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$$

VÍ DỤ 11 Tính $I = \int \frac{dx}{\sin x.\cos 2x}$

Hướng dẫn giải

Hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ đối với sinx (không phải là hàm lẻ của cos2x) nên ta đặt

$$t = \cos x \Rightarrow x = \arccos t \Rightarrow dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

VÍ DỤ 12 Tính $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$

Hướng dẫn giải

Ta nhận thấy hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn đối với sinx và cosx nên ta đặt:

$$t = tgx \Rightarrow x = \mathrm{arc}\,tgt \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

Đáp số $I = tgx - \frac{2}{tgx} - \frac{1}{3tg^3 x} + C.$

Dạng 2 Tích phân dạng tích ta luôn phải đưa về dạng tổng

$I = \int \sin ax \sin bxdx; J = \int \sin ax \cos bxdx; K = \int \cos ax \cos bxdx$

Sử dụng công thức lượng giác biến đổi tích thành tổng:

$$cosx.\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

$$sinx.\sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$sinx.\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$$

VÍ DỤ 13 Tính $I = \int \sin 2x.\cos 5xdx$

BÀI GIẢI

$$\sin 2x \cos 5x = \frac{1}{2}\left[\sin(2x-5x) + \sin(2x+5x)\right] = \frac{1}{2}\left[-\sin 3x + \sin 7x\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left[-\int \sin 3xdx + \int \sin 7xdx\right] = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{2}.\frac{1}{7}\cos 7x + c$$

3. Tích phân các hàm vô tỷ

Các hàm vô tỷ có dạng

$$I = \int R\left(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2}\right)dx \quad hoặc \quad J = \int R\left(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2}\right)dx$$

* Nếu $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + \alpha^2}\right)dx$ thì đặt

$$x = \alpha.tgt \quad \Rightarrow dx = \frac{\alpha}{\cos^2 t}dt = \alpha\left(1 + tg^2 t\right)dt$$

* Nếu $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2}\right)dx$ thì đặt

$$x = \frac{\alpha}{\cos t} \quad hoặc \quad x = \frac{\alpha}{\sin t}$$

* Nếu $\int R\left(x,\sqrt{\alpha^2-x^2}\right)dx$ thì đặt $\left[\begin{array}{l} x=\alpha\sin t \\ x=\alpha\cos t. \end{array}\right.$

* Nếu $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \quad a\neq 0$

\+ Nếu $a>0$ đặt $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$

\+ Nếu $c>0$ đặt $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$

\+ Nếu $ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm là:

$a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=0$

thì ta đặt $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(x-x_1\right)$

VÍ DỤ 14 Tính $I=\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx \qquad (a>0)$

BÀI GIẢI

Đặt $x=a\sin t \quad với\ -\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}; \quad \Rightarrow dx=a\cos tdt$

$và\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\left|\cos t\right|=a\cos t$

$$I=\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\int a.\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=a\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt$$

$$\mathrm{I}=a\left[\int\frac{dt}{\sin t}-\int\sin tdt\right] \qquad =a\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+a\cos t+C$$

Ta trở lại biến x ta có

$$x=a\sin t \Rightarrow \sin t=\frac{x}{a} \Rightarrow \cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

và

$$tg\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{\sin t}=\frac{1-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}}{\frac{x}{a}}=\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

Vậy

$$I=\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx \quad =a\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Các tích phân cần nhớ

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

b) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

d)

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

e) $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\right]+C.$

3.2 TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

I. Định nghĩa tích phân xác định

1. Bài toán diện tích hình thang cong

Cho hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $[a,b]$ Xét hình thang cong aABb. Ta chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia:

$x_0 \equiv a < x_1 < x_2 < \ . \ . \ . < x_{i-1} < x_i < . \ . \ . < x_n \equiv b.$

$\left(x_i \text{ tuỳ chọn}\right)$ (phép chia này còn gọi là phép phân hoạch).

- Đặt: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad \left(\forall i = \overline{1,n}\right)$
- Hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $[a,b]$ nên đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên $[x_{i-1}, x_i]$ lần lượt là:

$M_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\},\ m_i = \min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$

$\Rightarrow \ m_i \le f(\xi_i) \le M_i \ , \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i];\ \forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow \ m_i\Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i \ , \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i];\ \forall i = \overline{1,n}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i}_{\underline{S}} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}_{S_n} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i}_{\overline{S}} \ , \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Ta gọi $\overline{S},\ \underline{S}$ được gọi là tổng trên và tổng dưới

Ta sẽ lấy giới hạn cả 3 vế khi $n \to \infty$, và $\max \Delta x_i \to 0$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i := S \quad \text{và} \quad \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i := S$$

Do đó theo giới hạn kẹp ta có

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i := S \qquad (S \text{ hữu hạn})$$

S được gọi là diện tích của hình thang cong aABb.

Chú ý: Tổng $S_n \xrightarrow{n\to\infty} S$ đồng thời kéo theo $\max \Delta x_i \to 0$
Giới hạn trên không phụ thuộc vào cách phân hoạch (hay cách chia đoạn $[a,b]$ bởi các điểm chia x_i) và cách chọn điểm $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

2. Định nghĩa

Cho hàm $f(x)$ xác định, trên $[a,b]$, chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn nhỏ bởicác điểm chia:
$x_0 \equiv a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n \equiv b.$
$(x_i\ \textit{tuỳ chọn})$ Phép chia này còn gọi là phép phân hoạch.

- Đặt: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; lấy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$; $\left(\forall i = \overline{1,n}\right)$
- Lập tổng tích phân $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$
- Khi đó giới hạn $\lim_{n\to\infty} I_n = I$, S được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a,b]$, và ta ký hiệu: $I = \int_a^b f(x)dx$

và lúc đó ta nói hàm $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$.

3. Các tính chất của tích phân xác định

a) Hàm $f(x)$ có một số hữu hạn các điểm gián đoạn loại I trên đoạn $[a,b]$ thì khả tích trên đoạn đó.

b) Nếu hàm $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên $[a,b]$ và $\alpha, \beta \in R$ thì:

$$\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

c) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

d) Nếu hàm $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên $[a,b]$ và

$f(x) \geq g(x); \forall x \in [a,b]$ thì: $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

e) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \forall c \in [a,b]$.

4. Định lý giá trị trung bình

Nếu hàm $f(x)$ liên tục, khả tích trên $[a,b]$ thì $\exists c \in [a,b]$ sao cho: $\int_a^b f(\mathrm{x})dx = f'(c)(b-a)$

Chú ý *Nếu hàm số $f(x)$ là hàm lẻ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

*Nếu hàm số $f(x)$ là hàm chẵn thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

II. Công thức Newton – Leibnitz)

Định lý

Nếu hàm $f(x)$ liên tục, khả tích trên $[a,b]$ và $F(x)$ là nguyên hàm của nó thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

VÍ DỤ 1

$$\int_1^2 (x^2+3)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 3.2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 3.1\right) = \frac{16}{3}$$

III. Các phương pháp tính tích phân xác định

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1 (Đổi biến $x=\varphi(t)$)

Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$

Giả sử thực hiện phép đổi biến $x=\varphi(t)$ thoả mãn:

i) $\varphi(t)$ *có đạo hàm liên tục* $[\alpha,\beta]$

ii) $\varphi(a)=\alpha;\ \ \varphi(b)=\beta$

iii) Khi t biến thiên $[\alpha,\beta]$ *thì* $x=\varphi(t)$ *biến thiên* $[a,b]$

Khi đó: $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx}$

VÍ DỤ 2 Cho

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx \quad và \quad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

Hãy chứng minh rằng: $I_n=J_n$

Chứng minh

Thật vậy ta đặt $x=\frac{\pi}{2}-t \Rightarrow \cos x=\sin t$ *và* $dx=-dt$

Đổi cận $x=0\to t=\frac{\pi}{2};\quad x=\frac{\pi}{2}\to t=0$

Khi đó

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt=J_n;(\forall n\in\mathbb{N})$$

VÍ DỤ 3 Tính $I = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$

BÀI GIẢI

Đặt $x = 3\sin t \Rightarrow dx = 3\cos t dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 3 \Rightarrow 3\sin t = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 - 9\sin^2 t}.3\cos t dt = 9\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$I = 9\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 9\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{9\pi}{4}$$

Định lý 2 (Đổi biến $t = \varphi(x)$)

Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$.

Giả sử thực hiện phép đổi biến $t = \varphi(x)$ thỏa mãn:

i) $\varphi(t)$ *biến thiên đơn điệu ngặt và có đạo hàm liên tục* $[\alpha, \beta]$

ii) $f(x)dx$ *trở thành* $g(t)dt; g(t)$ *là một hàm số liên tục trong khoảng đóng* $[\varphi(a), \varphi(b)]$ *thì:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt$$

VÍ DỤ 3 Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ $\quad (\forall \alpha \in (0,\pi))$

BÀI GIẢI

Do $0<\alpha<\pi$ hàm $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x\cos\alpha+1}$ liên tục trên $[-1,1]$,ta thực hiện phép đổi biến số sau

$t=x-\cos\alpha \Rightarrow dt=dx$

Đổi cận :

$x=-1\to t=-1-\cos\alpha$ và $x=1\to t=1-\cos\alpha$

Khi đó

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\int_{-1-\cos\alpha}^{1-\cos\alpha}\frac{dt}{t^2+\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left[arctg\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+arctg\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sin\alpha}$$

VÍ DỤ 4 Tính $I=\displaystyle\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{dx}{e^x-1}$

BÀI GIẢI

Ta thêm,bớt

$$I=\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{dx}{e^x-1}=\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{-\left(e^x-1\right)+e^x dx}{e^x-1}=\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\left(-1+\frac{e^x}{e^x-1}\right)dx$$

$$=-x\Big|_{\ln 2}^{2\ln 2}+\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{d\left(e^x-1\right)}{e^x-1}=-2\ln 2+\ln 2+\ln\left|e^x-1\right|\Big|_{\ln 2}^{2\ln 2}$$

$$=-\ln 2+\ln\left|e^{2\ln 2}-1\right|-\ln\left|e^{\ln 2}-1\right|=-\ln 2+\ln 3=\ln\frac{3}{2}.$$

2. *Phương pháp tích phân từng phần*

Công thức $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$

VÍ DỤ 5 Tính $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x.\sin x}{\cos^2 x} dx$

BÀI GIẢI

Ta nhận thấy hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn

Vì vậy

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x.\sin x}{\cos^2 x} dx \quad = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{xd\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} x.d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 2\left[x.\frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}\right]$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{3}.\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} - \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}\right] = 2\left[\frac{2\pi}{3} - \ln\left|tg\frac{7\pi}{12}\right|\right].$$

3.3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

I. Tính tích phân có cận là vô hạn
(Tích phân suy rộng loại I)
1. Định nghĩa

a) Giả sử hàm $f\left(x\right)$ xác định trên $[a,+\infty)$ (a hữu hạn), $f\left(x\right)$ khả tích trên $\left[a,b\right], a < b < +\infty$. Tích phân suy rộng loại I của hàm $f\left(x\right)$ trên $[a,+\infty)$ được ký hiệu:

$$\int_a^{+\infty} f\left(x\right)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f\left(x\right)dx$$

- Nếu giới hạn là hữu hạn thì tích phân $\int_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ được gọi là hội tụ.
- Nếu không tồn tại giới hạn hoặc là giới hạn vô hạn thì tích phân $\int_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ được gọi là phân kỳ.

b) Tương tự $\int_{-\infty}^{b} f\left(x\right)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f\left(x\right)dx$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx = \int_{-\infty}^{c} f\left(x\right)dx + \int_c^{+\infty} f\left(x\right)dx$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f\left(x\right)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f\left(x\right)dx;\ \left(a < c < b\right)$$

Tích phân vế trái tồn tại và hội tụ khi và chỉ cả 2 tích phân ở vế phải tồn tại và hội tụ.

VÍ DỤ 1 Tính các tích phân suy rộng sau

$$a)\ I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}; \quad b) I_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}; \quad c) I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

BÀI GIẢI

a)

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(arctg(b) - arctg(0) \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

b)

$$I_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{o} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \left(arctg(o) - arctg(a) \right)$$

$$= 0 - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

$$c) I = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Chú ý: Nếu ít nhất một trong hai tích phân I_1 *hoặc* I_2 phân kỳ thì tích phân I phân kỳ.

VÍ DỤ 2 Xét sự hội tụ hay phân kỳ của tích phân $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

BÀI GIẢI

Trường hợp $\alpha \neq 1$

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{(b)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \left[\begin{array}{ll} +\infty & \text{nếu } \alpha < 1 \\ \dfrac{1^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & \text{nếu } \alpha > 1 \end{array} \right.$$

Trường hợp $\alpha = 1$

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln a) = \infty$$

Vậy tích phân I hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \le 1$.

VÍ DỤ 3 Các tích phân ruy rộng sau có đáp số tổng quát là

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{-e^{-ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx + b\cos bx\right)\Big|_0^c = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}\left(b\sin bx - a\cos bx\right)\Big|_0^c = \frac{a}{a^2+b^2}$$

2. Các tiêu chuẩn hội tụ

a) Trường hợp 1 (Hàm f(x) là hàm không âm)

Định lý 1 (Tiêu chuẩn so sánh 1)

Cho 2 hàm số $f(x)$ *và* $g(x)$ là 2 hàm không âm trên $[a,+\infty)$, khả tích trên mọi khoảng hữu hạn $[a,b]$ và $g(x) \ge f(x) \ge 0,\ \forall x \ge a$

Khi đó

- Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tu thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

Chú ý:

1) Ở mệnh đề 1 muốn xét sự hội tụ của tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ thì ta đánh giá hàm $g(x)$ sao cho: $0 \le f(x) \le g(x),\ \forall x \ge a$ mà việc xét sự hội tụ của tích

phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ dễ thực hiện, và kết quả là hội tụ thì ta kết luận tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. Nhưng ngược lại nếu tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì chúng ta không có kết luận gì.

2) Ở mệnh đề 2 muốn xét sự phân kỳ của tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ thì ta đánh giá hàm $f(x)$ sao cho:

$0 \le f(x) \le g(x),\ \forall x \ge a$ mà tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ kết quả là phân kỳ thì ta kết luận tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ. Nhưng ngược lại nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì chúng ta cũng không có kết luận gì.

3) Các tích phân $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ *và* $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ phân kỳ vì không tồn tại $\lim\limits_{b\to\infty} \sin b$ *và* $\lim\limits_{b\to\infty} \cos b$.

Định lý 2 (Tiêu chuẩn so sánh 2)

Cho 2 hàm số $f(x)$ *và* $g(x)$ là 2 hàm không âm trên $[a,+\infty)$, khả tích trên mọi khoảng hữu hạn $[a,b]$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$ thì

- Nếu $K = 0$ và nếu tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

(nghĩa là $g(x)$ là vô cùng lớn bậc cao hơn vô cùng lớn $f(x)$)

- Nếu $0 < K < +\infty$ thì khi đó tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng phân kỳ hoặc cùng hội tụ

- Nếu $K = +\infty$ và tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

VÍ DỤ 4 Xét sự hội tụ của các tích phân sau

$a)\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ $b)\ \int_1^{+\infty} \frac{x.arctgx}{\sqrt{1+x^3}}dx$

$c)\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}}$ $d)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\alpha}\ln^{\beta} x}\ \left(\alpha > 0, \forall \beta\right)$

BÀI GIẢI

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$

Ta nhận thấy:

$$\ln(1+x) > 1,\ \forall x \geq 2 \Rightarrow 1 + x > e \Rightarrow x > e - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \ge 2$$

Mà ta có tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kỳ $\overset{SS1}{\Rightarrow}$ thì tích phaân $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ phân kỳ.

b) $\int_1^{+\infty} \frac{x.arctgx}{\sqrt{1+x^3}} dx$

Xét 2 hàm không âm

$$f(x) = \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^3}} \ge 0 \;\; và \;\; g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ge 0 \;\; \forall x \ge 1$$

Ta xét $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^3}}.\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} = K \in (0,+\infty)$

Mà ta đã biết $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *phân kỳ* $\left(vì\ \alpha = \frac{1}{2} < 1 \right)$

$$\overset{SS2}{\Rightarrow} tích\ phân \int_1^{+\infty} \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^3}} dx\ phân\ kỳ.$$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}}$

$$\left.\begin{aligned} &Ta\ có: \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}} \\ &\quad mà\ \ tích\ phân \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{7}{6}}}\ \ hội\ tụ \left(vì\ \ \frac{7}{6} > 1 \right) \end{aligned}\right\}$$

$$\overset{SS1}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}} \quad hội\ tụ.$$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\alpha}\ln^\beta x} \quad (\alpha > 0, \forall \beta)$

Xét hàm

$$f(x) = \frac{1}{x^{1-\alpha}\ln^\beta x} \geq 0; \quad và \quad g(x) = \frac{1}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}} \geq 0; \qquad \forall x \geq 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^{1-\alpha}\ln^\beta x} : \dfrac{1}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\ln^\beta x} = +\infty \quad (\forall\beta) \\ mà \displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}} \quad phân\ kỳ \end{array}\right\}$$

$$\overset{SS2}{\Rightarrow} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\alpha}\ln^\beta x} \quad phân\ kỳ$$

Vậy tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\alpha}\ln^\beta x}$ phân kỳ.

b) Trường hợp 2: Hàm f(x) có dấu bất kỳ

Định lý 3 (về sự hội tụ tuyệt đối)

- Nếu tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ (chiều ngược lại là không đúng). Khi đó, ta nói rằng tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

- Nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ mà tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ không hội tụ thì ta gọi tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là bán hội tụ.

Chú ý:

1) Muốn xét sự hội tụ của tích phân hàm $f(x)$ có dấu bất kỳ thì ta không có định lý nào để áp dụng cũng như tính trực tiếp bằng định nghĩa gặp khó khăn, lúc đó ta chuyển về việc xét tính hội tụ của tích phân trị tuyệt đối là $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ thì lại chính là tích phân của hàm không âm, ta sẽ có công cụ để làm.

2) Định nghĩa trên chỉ có chiều thuận, không có chiều ngược lại tức là tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì không suy ra được tính hội tụ của tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Nhưng tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì ta suy ra được tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ.

Hơn nữa tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ thì ta cũng không suy ra được tính hội tụ hay phân kỳ của tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

II. Tích phân cho hàm không bị chặn

(tích phân suy rộng loại 2)

1. Định nghĩa

a) Giả sử hàm $f(x)$ xác định và khả tích trên mọi $[a,b-\varepsilon], \forall\varepsilon>0$ bé tuỳ ý và không giới nội khi $x \to b$ (b được gọi là điểm bất thường hay là điểm kỳ dị), tích phân suy rộng loại 2 của hàm $f(x)$ trên $[a,b]$.

Ký hiệu: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

- Nếu giới hạn là hữu hạn thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là hội tụ.
- Nếu không tồn tại giới hạn hoặc là giới hạn vô hạn thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là phân kỳ.

b) Tương tự $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$;

(a là điểm bất thường)

c) Tương tự $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)dx$;

(b và a là điểm bất thường).

d) Tương tự

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx;$$

(c là điểm bất thường)

VÍ DỤ 5 Tính các tích phân suy rộng loại 2 sau

$$a)\ \int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad b)\ \int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$c)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad d)\ \int_{0}^{1}\frac{dx}{x^\alpha}\quad khi\ \ \alpha>0$$

BÀI GIẢI

a) $$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\arcsin 0-\arcsin\left(-1+\varepsilon\right)\right]=\frac{\pi}{2}$$

(điểm x= -1 là điểm bất thường hay còn gọi là điểm kì dị)

b)

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\arcsin x\Big|_{0}^{1-\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\arcsin\left(1-\varepsilon\right)-0\right]=\frac{\pi}{2}$$

(điểm x= 1 là điểm bất thường hay còn gọi là điểm kì dị)

c) $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

d)

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_{0+\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha})$$

$$=\begin{cases}+\infty\ \ khi\ \ \alpha>1\\ \dfrac{1}{1-\alpha}\ \ khi\ \ 0<\alpha<1\end{cases}$$

Khi $\alpha=1$ thì $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0}(\ln1-\ln\varepsilon)=\infty$

Vậy tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ phân kì khi $\alpha \geq 1$ và

hội tụ khi $0 < \alpha < 1$

VÍ DỤ 6 Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$; $(a < b; \alpha > 0)$;

b) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $(a < b; \alpha > 0)$

BÀI GIẢI

a) Ta thấy $x = b$ là điểm kỳ dị,ta có

TH1: $\alpha \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{-1}{1-\alpha} (b-x)^{-\alpha+1} \Big|_a^{b-\varepsilon} \right)$$

$$= \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} - \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-\alpha} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \textit{nếu } \ 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & \textit{nếu } \ 1 < \alpha \end{array} \right.$$

$$= \frac{-1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha} \right]$$

TH2: $\alpha = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^1} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{d(b-x)}{(b-x)} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon}\right]$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\varepsilon - \ln(b-a)\right] = +\infty$$

Vậy $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \textit{nếu } 0<\alpha<1 \\ +\infty & \textit{nếu } \alpha\ge 1 \end{array}\right.$

Nên tích phân $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ hội tụ khi $0<\alpha<1$ và

Phân kỳ khi $\alpha\ge 1$.

b) Tương tự tích phân $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ có điểm kỳ dị là $x=a$

thì $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ hội tụ khi $0<\alpha<1$ và phân kỳ khi $\alpha\ge 1$.

VÍ DỤ 7 Xét sự hội tụ của các tích phân sau $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

BÀI GIẢI

Ta thấy tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ có điểm bất thường là $x=1$, nhưng bằng phép đổi biến sau thì ta sẽ đưa tích phân trên về dạng tích phân bình thường (không phải loại suy rộng).

Thật vậy

Đặt $x=\sin t$ *xác định trên* $[0,c]$; trong đó $c\in(0,1)$

$$t = \arcsin x \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Đổi cận $x = 0 \to t = 0;\ và\ x = c \to t = \arcsin c$

Vậy

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{c\to 1^-}\int_0^c 2x.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1^-}\int_0^{\arcsin c} 2\sin t.dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t.dt$$

Tích phân cuối cùng là một tích phân thường, hàm số hoàn toàn xác định trên đoạn lấy tích phân.

2. Các tiêu chuẩn hội tụ (giả sử x = b là điểm kỳ dị)

a) Định lý 1 (Tiêu chuẩn so sánh 1)

Cho 2 hàm số $f(x)\ và\ g(x)$ là 2 hàm không âm, khả tích trên mọi khoảng hữu hạn $[a,c),(a \le c < b)$ và $g(x) \ge f(x),\ \forall x \ge a$ Khi đó:

- Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ
- Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ

b) Định lý 2 (Tiêu chuẩn so sánh 2)

Cho 2 hàm số $f(x)\ và\ g(x)$ là 2 hàm không âm, khả tích trên mọi khoảng hữu hạn $[a,c)$, và $(a \le c < b)$

$\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$ thì

- K=0 và nếu tích phân $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ

(nghĩa là $g(x)$ là VCL bậc cao hơn VCL $f(x)$)

- $0 < K < +\infty$ thì khi đó tích phân $\int_a^b f(x)dx$ và tích phân $\int_a^b g(x)dx$ cùng phân kỳ hoặc cùng hội tụ

- $K = \infty$ và tích phân $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

c) Định lý 3 (về sự hội tụ tuyệt đối)

Nếu tích phân suy rộng loại 2: $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, ngược lại không đúng

Và lúc đó ta nói rằng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối

Còn nếu tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ mà tích phân $\int_a^b |f(x)|dx$ không hội tụ thì ta gọi tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là bán hội tụ.

Chú ý:

1) Cũng tương tự như chú ý trường hợp tích phân suy rộng loại 1

2) Tích phân có điểm bất thường là a thì hoàn toàn tương tự.

3) Có nhiều tích phân suy rộng chứa cả 2 loại tích phân (loại 1 và loại 2) thì buộc chúng ta phải tách ra thành 2 loại tích phân tại đúng điểm bất thường đó.Chẳng hạn

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx;\ \textit{hàm không xác định tại } x = b \in (a, +\infty)$$

Ta có: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$

VÍ DỤ 8 Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ b) $J = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

c) $E = \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ d) $F = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

BÀI GIẢI

a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}$

Ta nhận thấy $x = 1$ là điểm kỳ dị,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} = \frac{1}{(1+x)^{1/4}.(1-x)^{1/4}} \le \frac{1}{(1-x)^{1/4}} \quad \forall x \in (0,1)$$

$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/4}}$ hội tụ vì $\alpha = \frac{1}{4} < 1$ nên theo tiêu chuẩn so sánh 1 thì tích phân I hội tụ.

b) $J = \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

Ta nhận thấy x=2 là điểm kỳ dị

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(2-x)^3} = \int\limits_0^{2} \frac{dx}{(2-x)^3} + \int\limits_2^{3} \frac{dx}{(2-x)^3} + \int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{(2-x)^3}$$

Ta thấy tích phân $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{(2-x)^3}$ phân kì vì $\alpha = 3 > 1$ nên tích phân J đã cho phân kỳ.

c) $E = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$

Ta nhận thấy $x = 0$ là điểm kỳ dị,

Và ta có: $f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \geq 0;\ \forall x \in [0,1];$

Xét hàm $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ta có

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - 1} = 1 \; mà \; \int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \; hội \;\; tụ$$

$$\overset{SS2}{\Rightarrow} tp \; E \;\; hội \; tụ.$$

d) $F = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$

Ta thấy hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ là hàm nhận giá trị âm trên miền lấy tích phân, do đó ta phải chuyển vế tính tích phân của hàm

$$-f\left(x\right)=\frac{1}{1-\sqrt{x}}\geq 0,\ \forall 0\leq x<1$$

Suy ra $F=-\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$

Xét hàm không âm $g\left(x\right)=\frac{1}{1-x} \geq 0 \quad \forall x\in[0,1)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ta xét } \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}=2=K\in\left(0,+\infty\right)\\ \text{Mà ta đã biết } \int_0^1 \frac{dx}{1-x} \ \textit{phân kỳ} \ \left(\textit{vì } \alpha=1\right)\end{array}\right\}\overset{SS2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \textit{tích phân } F=-\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}} \ \textit{phân kỳ.}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

3.1 Tính các tích phân sau

a) $I=\int \frac{x^2}{(1+x)^8}dx$ b) $J=\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

c) $K=\int xe^{-x}dx$ d) $L=\int x\cos x dx$

e) $M=\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ f) $N=\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$

3.2. Tính các tích phân dạng phân thức sau

a) $I=\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$ b) $J=\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$

c) $K=\int \frac{dx}{x^3+1}$ d) $p=\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$

3.3. Tính các tích phân dạng lượng giác sau

a) $I=\int(\sin 5x-\sin 5y)dx$ b) $J=\int \sin x\sin(x+y)dx$

c) $K=\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$ d) $L=\int \frac{1+\cos x}{\sin x-1}dx$

e) $M=\int \sin x\cos^2 x dx$ f) $N=\int \frac{\sin x}{\cos^2 x-2\cos x+5}dx$

3.4. Tính các tích phân dạng hàm vô tỷ sau

a) $I=\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}dx$ b) $J=\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$

3.5. Tính các tích phân xác định sau:

a) $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5}dx$ b) $J=\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

c) $K = \int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{x}$ d) $p = \int_0^{\ln 2} xe^x dx$

3.6 Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau

a) $A = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+4)^2}$ b) $B = \int_1^{+\infty} \frac{2dx}{x+4}$

c) $C = \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x+3)^2}$ d) $D = \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^4}$

e) $E = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$ f) $F = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

g) $G = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ h) $H = \int_{-\infty}^{0} xe^{2x} dx$

i) $I = \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} dx$ j) $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

k) $K = \int_{-\infty}^{0} xe^x dx$ n) $N = \int_0^{+\infty} \cos x\, dx$

m) $M = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$ p) $P = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx$

q) $Q = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x} dx$

3.7 Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau

a) $A = \int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^2}$ b) $B = \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-5}}$

c) $C = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ d) $D = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $E = \int_{1/6}^{1/3} \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}$ f) $F = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$

g) $G = \int_0^1 x \ln^2 x dx$ h) $H = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

i) $I = \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$ j) $J = \int_0^1 x \ln x dx$

3.8 Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau

a) $A = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ b) $B = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-2}$ c) $C = \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$

3.9 Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau

a) $A = \int_2^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+2x+2} dx$ b) $B = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x + 2}}$

c) $C = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$ d) $D = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^3(x-2)(x+1)}} dx$

e) $E = \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^3(x-2)(x+1)}} dx$ f) $F = \int_1^{+\infty} (1-\cos\frac{2}{x}) dx$

g) $G = \int_0^1 \frac{1}{tgx - x} dx$ h) $H = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^3}} dx$

i) $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2+x}} dx$

CHƯƠNG IV
PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

4.1 KHÁI NIỆM HÀM NHIỀU BIẾN SỐ

I. Định nghĩa

1. *Miền phẳng*

- Cho tập $E \neq \varnothing$, ta gọi biên của E là tập hợp tất cả những điểm mà hình tròn tâm tại đó, bán kính bất kỳ đều chứa những điểm thuộc E và chứa những điểm không thuộc E. Kí hiệu: ∂E.

- E gọi là đóng nếu E chứa tất cả các điểm của ∂E; E là tập mở nếu E không chứa biên của E.

- E gọi là liên thông nếu với 2 điểm bất kỳ của E đều có thể thể nối với nhau bằng 1 đường liên tục trong E.

- E gọi là 1 miền nếu E mở và liên thông. E gọi là miền đóng nếu E đóng và $E \setminus \partial E$ là 1 miền.

- E gọi là bị chặn nếu tồn tại hình tròn S bán kính $R < +\infty$ sao cho $E \subset S$.

VÍ DỤ1

a) Hình tròn, đa giác, … không kể biên là 1 miền; kể cả biên là 1 miền đóng.

b)Tập

$$M = \left\{(x,y)/\,x^2 + y^2 \le 1\right\} \cup \left\{(x,y)/(x-2)^2 + y^2 \le 1\right\}$$

là 1 tập đóng và liên thông nhưng không phải là miền đóng

2. Định nghĩa hàm 2 biến

a) Định nghĩa

Cho $E \subset R^2$, một hàm 2 biến xác định trên E là 1 quy luật f đặt tương ứng mỗi điểm $(x , y) \in E$ với 1 số thực duy nhất $Z = f(x, y) \in R$.

Ký hiệu: $f : E \to R$ hay $(x, y) \mapsto Z = f(x, y)$

Thông thường E là 1 miền nên E gọi là miền xác định của f. Nếu f cho bởi công thức mà không nói gì thêm thì miền xác định của f là tập các điểm $(x, y) \in R^2$ để f(x, y) xác định.

VÍ DỤ 2

a) Hàm $Z = x^2 + y^2$ có miền xác định $D = R^2$ (mặt phẳng toạ độ Oxy).

b)Hàm $Z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ có miền xác định là

$$D = \left\{(x,y) \big/ x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

(hình tròn đóng tâm O(0, 0), bán kính R = 1).

c) Hàm Z = ln(x.y) có miền xác định là tập các điểm nằm ở góc góc phần tư thứ I và thứ III không kể biên:

$$D = \left\{(x,y) \Big/ \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}\right\}$$

b) Biểu diễn hàm 2 biến (đồ thị)

Cho hàm z = f(x, y). Tập hợp tất cả các điểm (x, y, z) trong không gian Oxyz tạo thành một mặt gọi là biểu diễn (đồ thị) của hàm z = f(x, y).

VÍ DỤ 3

a) Hàm $z = x^2 + y^2$ có biểu diễn là mặt Parabôlôít tròn xoay.

b) Hàm $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ có biểu diễn là nửa trên của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

3. Định nghĩa hàm n biến

Cho $E \subset R^n$, một hàm n biến xác định trên E là 1 quy luật f đặt tương ứng mỗi điểm $(\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}) \in E$ với 1 số thực duy nhất $\boldsymbol{y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \in R$.

Ký hiệu: $f : E \to R; (\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}) \mapsto \boldsymbol{y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

II. Giới hạn của hàm 2 biến số

1. Giới hạn kép

Cho hàm z = f(x, y) xác định trên miền D, có thể trừ $(x_0, y_0) \in D$.

a) Định nghĩa 1

Ta nói f(x, y) có giới hạn là A khi (x, y) tiến đến (x_0, y_0).

Ký hiệu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ nếu mọi dãy điểm $\{(x_n,y_n)\}\subset D\setminus\{(x_0,y_0)\}$ sao cho $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$ ta đều có $f(x_n,y_n)\to A$.

b) Định nghĩa 2

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0: 0<\rho\left[(x,y),(x_0,y_0)\right]<\delta$$

$$\Rightarrow \left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$$

c) Tínhchất

Nếu

$f(x,y)\to A$; $g(x,y)\to B$ (khi $(x,y)\to(x_0,y_0)$) thì

$*f(x, y)\pm g(x, y)\to A\pm B$;

$*\,f(x, y).g(x, y)\to A.B$

$*\dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}\to\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$;

$*\,f(x, y)^{g(x,y)}\to A^B\ \ (0<A\neq 1)$

VÍ DỤ 4 Tìm các giới hạn kép của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}\left(x^2-y^3\right)=\left(2^2-3^3\right)=-23$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$ vì $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right||x| \le \dfrac{1}{2}|x| \to 0$ khi $x \to 0$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\right) = ?$. Để tìm giới hạn này ta phải dựa vào nguyên lý kẹp và dành giá như sau

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \dfrac{x^2}{x^4+y^4} + \dfrac{y^2}{x^4+y^4} \le \dfrac{x^2}{x^4} + \dfrac{y^2}{y^4} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} \\ \text{mà } \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\overset{nl\ kẹp}{\Rightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0.$$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại vì :

* Chọn $x_n = y_n = \dfrac{1}{n} \to 0$. Khi đó $\dfrac{x_ny_n}{x_n^2+y_n^2} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$

* Chọn $x_n = \dfrac{1}{n} \to 0$; $y_n = \dfrac{2}{n} \to 0$.

Khi đó $\dfrac{x_ny_n}{x_n^2+y_n^2} = \dfrac{2}{5} \to \dfrac{2}{5}$

Theo định nghĩa trên giới hạn này không tồn tại.

2. Giới hạn lặp

Các giới hạn sau gọi là những giới hạn lặp

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) \text{ và } \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

Để cho gọn người ta bỏ dấu ngoặc đi.

VÍ DỤ 5 Tìm giới hạn lặp của các hàm số sau

a) Xét hàm $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ khi $x,y\to 0.$

Ta có : * $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y+y^2}{y}=-1$

* $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{x}=1$

b) Xét hàm $f\left(x,y\right)=\dfrac{xy+4x}{x^2+y^2}$ khi $x,y\to 0.$

Ta thấy * $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy+4x}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x}{x^2}\right)=\infty$

* $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy+4x}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{0}{y^2}\right)=0$

c) Xét hàm $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$ Khi $x,y\to 0.$

Ta có * Vì $\left|x\sin\dfrac{1}{y}\right|\le|x|$ nên $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

$$*\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0.\sin\frac{1}{y} = 0$$

nhưng $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ không tồn tại.

III. Sự liên tục của hàm 2 biến

1. Định nghĩa

- Hàm f(x, y) được gọi là liên tục tại (x_0, y_0) nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.
- Hàm f(x, y) được gọi là liên tục trên E nếu nó liên tục tại $\forall(x,y)\in E$.

2. Định lý

Nếu f(x, y), g(x, y) liên tục tại (x_0, y_0) thì các hàm sau cũng liên tục tại (x_0, y_0) :

$$f(x, y) \pm g(x, y) \;;\; f(x, y).g(x, y) \;;\; \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \;;\; f(x, y)^{g(x,y)}$$

VÍ DỤ 6 Xét tính liên tục của các hàm số sau

a) f(x, y) = sin(2x + y) liên tục tại $\forall(x,y)$.

b) Hàm $f(x,y) = \begin{cases} 5 - x - y & \text{nếu } (x,y)\neq(1,2) \\ 1 & \text{nếu } (x,y) = (1,2) \end{cases}$

Ta có: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (5 - x - y) = 2 \neq 1 = f(1,2)$

Vậy hàm số gián đoạn tại $(1,2)$.

c) Hàm $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Liên tục theo biến x, y nhưng không liên tục tại $(0,0)$.

Thậy vậy: * Ta xét tại $\forall(x,y)\neq(0,0)$:

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{0}{x^2}\right)=0$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{0}{y^2}\right)=0.$$

* Xét tại $(0,0)$ Ta chọn dãy

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}(0,0)$$

Và $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=1\neq0.$

Vậy hàm số gián đoạn tại $(0,0)$.

d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

liên tục tại $\forall(x,y)$.

4.2 ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN CẤP 1

I. Định nghĩa đạo hàm riêng

1. Đạo hàm riêng

Xét hàm Z=f(x, y) xác định trên miền D và $(x_0, y_0) \in D$.

a) Đạo hàm riêng theo biến x

Đặt $\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)$ và $\Delta x = x - x_0$ Nếu tồn tại hữu hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x f}{\Delta x}$ thì giới hạn đó gọi là đạo hàm riêng theo biến x của f(x, y) tại (x_0, y_0).

Kí hiệu: $f'_x(x_0, y_0)$ hay $Z'_x(x_0, y_0)$ hay $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$.

Ta có: $f'_x(x_0, y_0) = Z'_x(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x f}{\Delta x}$

b) Đạo hàm riêng theo biến y

Tương tự : $\Delta_y f = f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)$; $\Delta y = y - y_0$

ta có đạo hàm riêng theo biến y của f(x,y) tại (x_0, y_0) là:

$$f'_y(x_0, y_0) = Z'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$$

Như vậy muốn tìm đạo hàm riêng theo biến nào ta chỉ cần lấy đạo hàm của hàm theo biến đó và xem biến còn lại là hằng số.

VÍ DỤ 1 Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của

$f(x,y) = e^x \cos y$.

BÀI GIẢI

$f'_x(x,y) = e^x \cos y; \quad f'_y(x,y) = -e^x \sin y$

VÍ DỤ 2 Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm số tại điểm bất kỳ thuộc miền xác định của hàm

a) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^3)$

$$\Rightarrow f'_x(x,y) = -\sin\left(x^2 + y^3\right)\left(x^2 + y^3\right)'_x = -2x.\sin\left(x^2 + y^3\right)$$

$$\text{và} \quad f'_y(x,y) = -\sin\left(x^2 + y^3\right)\left(x^2 + y^3\right)'_y = -3y^2.\sin\left(x^2 + y^3\right)$$

b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

$$\Rightarrow f'_x(x,y) = \frac{(xy)'_x}{2\sqrt{xy}} = \frac{y}{2\sqrt{xy}}$$

$$\text{và} \quad f'_y(x,y) = \frac{(xy)'_y}{2\sqrt{xy}} = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$$

c) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y^2}}$

$$\Rightarrow f'_x(x,y) = \left(e^{\frac{x}{y^2}}\right)'_x = \left(\frac{x}{y^2}\right)'_x . e^{\frac{x}{y^2}} = \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y^2}}$$

$$\text{và} \quad f'_y(x,y) = \left(e^{\frac{x}{y^2}}\right)'_y = \left(\frac{x}{y^2}\right)'_y . e^{\frac{x}{y^2}} = -\frac{2x}{y^3} e^{\frac{x}{y^2}}$$

d) $f(x,y) = ar\sin(x^2 + y^3)$

$$\Rightarrow f_x^{'}(x,y) = \frac{(x^2+y^3)'}{\sqrt{1-(x^2+y^3)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y^3)^2}}$$

$$f_y^{'}(x,y) = \frac{(x^2+y^3)'}{\sqrt{1-(x^2+y^3)^2}} = \frac{3y}{\sqrt{1-(x^2+y^3)^2}}$$

e) $f(x,y) = xy^2 - \sin xy$

$$\Rightarrow f_x^{'}(x,y) = y^2 - y\cos xy; \quad f_y^{'}(x,y) = 2xy - x\cos xy$$

f) $f(x,y,z) = e^{x+3y^2} + 2x + z^2 + y^3)$

$$\Rightarrow \; f'_x\left(x,y,z\right) = \left(e^{x+3y^2} + 2x + y^3 + z^2\right)'_x = e^{x+3y^2} + 2$$

$$và \;\; f'_y\left(x,y,z\right) = \left(e^{x+3y^2} + 2x + y^3 + z^2\right)'_y = 6ye^{x+3y^2} + 3y^2$$

$$f'_z\left(x,y,z\right) = \left(e^{x+3y^2} + 2x + y^3 + z^2\right)'_z = 2z$$

II. Vi phân toàn phần cấp 1 của hàm 2 biến

1. Định nghĩa

Cho hàm f(x, y) xác định trên miền D và điểm $(x_0, y_0) \in D$.

Đặt $\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0,\, y_0)$. Nếu tồn tại các số A và B sao cho $\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha(\Delta x) + \beta(\Delta y)$. Trong đó $\alpha(\Delta x)$, $\beta(\Delta y)$ là các VCB bậc cao của Δx, Δy khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ thì ta nói f(x,y) khả vi tại (x_0, y_0) và biểu thức $df = A\Delta x + B\Delta y$ gọi là vi phân toàn phần của f(x, y) tại điểm (x_0, y_0).

2. Định lý

a) Nếu f(x, y) khả vi tại (x_0, y_0) thì f(x, y) có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) và $A = f'_x(x_0, y_0)$; $B = f'_y(x_0, y_0)$.

b)Nếu f(x, y) có các đạo hàm riêng trong miền chứa (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng này liên tục tại (x_0, y_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0) và $df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$

VÍ DỤ 4 Tìm vi phân toàn phần cấp 1 của hàm

$$f(x, y) = x^2 y - \cos xy$$

BÀI GIẢI

$$\Rightarrow f'_x(x, y) = 2xy + y\sin xy; \quad f'_y(x, y) = x^2 + x\sin xy$$

là các hàm liên tục trên toàn mặt phẳng nên f(x,y) khả vi tại $\forall(x, y)$ và

$$df(x, y) = (2xy + y\sin xy)dx + (x^2 + x\sin xy)dy$$

VÍ DỤ 5 Tìm vi phân toàn phần cấp 1 của hàm

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y)$$

BÀI GIẢI

$f'_x = 2x\cos(x^2+y)$; $f'_y = \cos(x^2+y)$ là các hàm liên tục trên toàn mặt phẳng nên f(x, y), khả vi tại $\forall(x,y)$ và

$$df(x,y) = 2x\cos(x^2+y)dx + \cos(x^2+y)dy$$

VÍ DỤ 6 Tìm vi phân toàn phần cấp 1 của hàm

$$f(x,y) = (x+2y)e^{x+y}$$

BÀI GIẢI

$$f'_x(x,y) = e^{x+y} + (x+2y)e^{x+y} = e^{x+y}(1+x+2y)$$

$$f'_y(x,y) = 2e^{x+y} + (x+2y)e^{x+y} = e^{x+y}(2+x+2y)$$

là các hàm liên tục trên toàn mặt phẳng nên f(x,y) khả vi tại $\forall(x,y)$ và

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y).dy$$

$$= e^{x+y}(1+x+2y).dx + e^{x+y}(2+x+2y).dy$$

III. **Ứng dụng vi phân tính gần đúng giá trị của hàm**

Từ $\Delta f = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,\ y_0)$ và theo định nghĩa vi phân

$$\Rightarrow f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

VÍ DỤ 7 Tính gần đúng biểu thức $A = \sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$

BÀI GIẢI

$A = \sqrt{(1+02)^3 + (2-0.03)^3}$ Xét hàm $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$

$x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\Delta_x = 0,02$, $\Delta_y = -0,03$

$A \approx f(1,2) + f'_x(1,2).0,02 + f'_y(1,2).(-0,03)$

$f(1,2) = \sqrt{1^3 + 2^3} = 3$, $f'_x(1,2) = \left.\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}\right|_{(1,2)} = \dfrac{1}{2}$

$f'_y(1,2) = \left.\dfrac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}\right|_{(1,2)} = 2$ nên

$A \approx 3 + \dfrac{1}{2}.0,02 + 2.(-0,03) = 2,95$

IV. Đạo hàm của hàm hợp

Cho hàm z = f(u, v), trong đó u = u(x, y), v = v(x, y).

Khi đó ta nói z là hàm hợp của x, y thông qua 2 biến trung gian u, v: $z = f\left[u(x,y),\ v(x,y)\right]$.Nếu f(u, v) khả vi theo u, v và u, v có các đạo hàm riêng liên tục theo x, y thì:

$$f'_x = f'_u.u'_x + f'_v.v'_x \quad \text{và} \quad f'_y = f'_u.u'_y + f'_v.v'_y$$

VÍ DỤ 8 Cho $z = e^u \sin v$ với u = xy , v = x + y.Hãy tính $z'_x; z'_y$

BÀI GIẢI

$z'_x = e^u \sin v.y + e^u \cos v = e^{x+y}[y\sin(x+y) + \cos(x+y)]$

$z'_y = e^u \sin v.x + e^u \cos v = e^{x+y}[x\sin(x+y) + \cos(x+y)]$

V. Đạo hàm của hàm ẩn

1. Hàm ẩn 1 biến Nếu hệ thức F(x, y) = 0 xác định hàm ẩn y = y(x) khả vi và F(x, y) có các đạo hàm riêng $F'_x, F'_y \ (F'_y \neq 0)$ thì: $F'_x + F'_y.y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$

VÍ DỤ 9 Cho $F(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ .Xác định $y'_x = ?$

BÀI GIẢI

Ta có: $F'_x = \dfrac{2x}{a^2}$, $F'_y = \dfrac{2y}{b^2}$. với $y \neq 0 \Rightarrow y'_x = -\dfrac{b^2}{a^2}.\dfrac{x}{y}$

2. Hàm ẩn 2 biến Nếu hệ thức F(x, y, z) = 0 xác định hàm ẩn 2 biến z = f(x, y) có các đạo hàm riêng và F(x, y, z) có các đạo hàm riêng $F'_x, F'_y, F'_z \ (F'_z \neq 0)$ thì

$$\begin{cases} F'_x + F'_z.z'_x = 0 \\ F'_y + F'_z.z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} \\ z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} \end{cases}$$

VÍ DỤ 10 Cho $F(x,y,z) = e^z + xy + x^2 + z^3 - 1 = 0$.

Xác định đạo hàm hàm ẩn Z(x, y).

BÀI GIẢI : $F'_x = y + 2x$, $F'_y = x$, $F'_z = e^z + 3z^2$

Vì $F'_z \neq 0 \ \ \forall z$ nên $z'_x = -\dfrac{2x+y}{e^z + 3z^2}$, $z'_y = -\dfrac{x}{e^z + 3z^2}$

4.3 ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN CẤP 2

I. Đạo hàm riêng cấp 2

Cho hàm Z=f(x, y) có các đạo hàm riêng cấp 1 :

$f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$. Đạo hàm của các đạo hàm riêng cấp 1 gọi là đạo hàm riêng cấp 2

1. Đạo hàm riêng cấp 2 theo biến x.

Nếu hàm $f'_x(x,y)$ có đạo hàm riêng theo biến x thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm riêng cấp 2 theo biến x .

Kí hiệu $f''_{x^2}(x,y)$ hay $Z''_{x^2}(x,y)$ hay $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$.

2. Đạo hàm riêng cấp 2 theo biến y.

Tương tự $f'_y(x,y)$ có đạo hàm riêng theo biến y thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm riêng cấp 2 theo biến y.

Kí hiệu $f''_{y^2}(x,y)$ hay $Z''_{y^2}(x,y)$ hay $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$.

3. Đạo hàm riêng hỗn hợp cấp 2 .

a) Nếu $f'_x(x,y)$ có đạo hàm riêng theo biến y thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm hỗn hợp theo x và y của f(x, y).

Kí hiệu $f''_{xy}(x,y)$ hay $Z''_{xy}(x,y)$ hay $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$.

b) Nếu $f'_y(x,y)$ có đạo hàm riêng theo biến x thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm hỗn hợp theo y và x của f(x, y).

Kí hiệu $f''_{yx}(x,y)$ hay $Z''_{yx}(x,y)$ hay $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Tuỳ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm ta có các đạo hàm hỗn hợp $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$

Định lý SWACC: Nếu các hàm f''_{xy}, f''_{yx} liên tục tại (x,y) thì tại đó ta có $f''_{xy} = f''_{yx}$.

VÍ DỤ1 Tính các đạo hàm riêng cấp 2 cho hàm $z = x^2 y^3 + x^4$

$z'_x = 2xy^3 + 4x^3$; $z'_y = 3x^2y^2$

$z''_{xx} = 2y^3 + 12x^2$; $z''_{yy} = 6x^2y$; $z''_{xy} = 6xy^2$; $z''_{yx} = 6xy^2$

II.Vi phân toàn phần cấp 2

1. Định nghĩa

Cho hàm f(x,y) có vi phân toàn phần cấp 1 $df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$. Vi phân toàn phần của $df(x,y)$ gọi là vi phân toàn phần cấp 2 của f(x, y) với dx, dy là hằng số. Kí hiệu $d^2f(x,y)$.

2. Công thức

Theo định nghĩa ta có

$$d^2f(x,y) = d(df(x,y)) = d(f'_x\,dx + f'_y\,dy)$$

$$\Rightarrow d^2f = (f'_x\,dx + f'_y\,dy)'_x\,dx + (f'_x\,dx + f'_y\,dy)'_y\,dy$$

$$\Rightarrow d^2f = f''_{x^2}\,dx^2 + 2f''_{xy}\,dxdy + f''_{y^2}\,dy^2$$

Với (x,y) mà các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục.

$$\text{hay } d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Ta dùng ký hiệu hình thức: $d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$

Tổng quát: Vi phân toàn phần cấp n của f(x,y) được định nghĩa là $d^nf(x,y) = d(d^{n-1}f(x,y))$

và do đó ta có công thức : $d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$

VÍ DỤ 2 Tìm vi phân toàn phần cấp 2 cho hàm $f(x,y) = e^x y^2$.

BÀI GIẢI

Ta có $f_x' = e^x y^2$; $f_y' = 2e^x y$

$f''_{x^2} = e^x y^2$, $f''_{xy} = 2ye^x$, $f''_{y^2} = 2e^x$ là các hàm liên tục với $\forall(x,y)$ do đó $d^2f = e^X(y^2dx^2 + 4ydxdy + 2dy^2)$

VÍ DỤ 3 Tìm vi phân toàn phần cấp 2 cho hàm số

$$f(x,y) = x^2y^3 + x^4$$

BÀI GIẢI

$$f'_x = 2xy^3 + 4x^3 \;;\; f'_y = 3x^2y^2; f''_{x^2} = 2y^3 + 12x^2 \;;$$

$$f''_{yx} = 6xy^2 = f''_{xy} = 6xy^2 \;;\; f''_{y^2} = 6x^2y$$

là các hàm liên tục với $\forall(x,y)$,do đó

$$d^2f = \left(2y^3 + 12x^2\right)dx^2 + \left(12xy^2\right)dxdy + 6x^2ydy^2$$

VÍ DỤ 4 Tìm vi phân toàn phần cấp 2 cho hàm

$$f\left(x,y\right) = \cos\left(x^2 + y^3\right)$$

BÀI GIẢI

$$\Rightarrow f'_x\left(x,y\right) = -\sin\left(x^2+y^3\right)\left(x^2+y^3\right)'_x = -2x.\sin\left(x^2+y^3\right)$$

$$và \;\; f'_y\left(x,y\right) = -\sin\left(x^2+y^3\right)\left(x^2+y^3\right)'_y = -3y^2.\sin\left(x^2+y^3\right)$$

$$\Rightarrow f''_{xx}\left(x,y\right) = -2.\sin\left(x^2+y^3\right) - 4x^2\cos\left(x^2+y^3\right)$$

$$và \;\; f''_{xy}\left(x,y\right) = -3y^2.2x.\cos\left(x^2+y^3\right)$$

$$f''_{yy}\left(x,y\right) = -6y^2.\sin\left(x^2+y^3\right) - 9y^4\cos\left(x^2+y^3\right)$$

là các hàm liên tục trên toàn mặt phẳng ta có

$$d^2f = \left[-2\sin(x^2+y^3) - 4x^2\cos(x^2+y^3)\right]dx^2$$

$$+2\left[-6xy^2\cos(x^2+y^3)\right]dxdy$$

$$+\left[-6y^2\sin(x^2+y^3) - 9y^4\cos(x^2+y^3)\right]dy^2$$

VÍ DỤ 5 Tìm vi phân toàn phần cấp 2 cho hàm số

$$f(x,y) = \arccos(2x+3y)$$

BÀI GIẢI

$$f'_x(x,y) = \frac{-(2x+3y)'}{\sqrt{1-(2x+3y)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1-(2x+3y)^2}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-(2x+3y)'}{\sqrt{1-(2x+3y)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{1-(2x+3y)^2}}$$

$$f''_{xx}(x,y) = \left[-2\left[1-(2x+3y)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right]'$$

$$= -2(-\frac{1}{2})\left[1-(2x+3y)^2\right]^{-\frac{3}{2}}(-2)(2x+3y)2$$

$$= -4\left[1-(2x+3y)^2\right]^{-\frac{3}{2}}(2x+3y)$$

$$f''_{yy}(x,y) = \left[-3\left[1-(2x+3y)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right]'$$

$$= -3(-\frac{1}{2})\left[1-(2x+3y)^2\right]^{-\frac{3}{2}}(-2)(2x+3y)3$$

$$= -9\left[1-(2x+3y)^2\right]^{-\frac{3}{2}}(2x+3y)$$

$$f''_{yx}(x,y)=\left[-2\left[1-(2x+3y)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right]'$$

$$=-2(-\frac{1}{2})\left[1-(2x+3y)^2\right]^{-\frac{3}{2}}(-2)(2x+3y)3$$

$$=-6\left[1-(2x+3y)^2\right]^{-\frac{3}{2}}(2x+3y)$$

Với (x,y) mà các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục ta có

$$d^2f=\left\{-4\left[1-(2x+3y)^2\right]^{-\frac{3}{2}}(2x+3y)\right\}dx^2+$$

$$\left\{-6\left[1-(2x+3y)^2\right]^{-\frac{3}{2}}(2x+3y)\right\}dxdy+$$

$$\left\{-9\left[1-(2x+3y)^2\right]^{-\frac{3}{2}}(2x+3y)\right\}dy^2$$

VÍ DỤ 6 Tìm vi phân toàn phần cấp 2 cho hàm số $f(x,y)=\ln(\frac{x}{y})$

BÀI GIẢI

Ta có $f(x,y)=\ln(\frac{x}{y})=\ln x-\ln y$ nên

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{x};f'_y(x,y)=\frac{-1}{y};f''_{xx}(x,y)=\frac{-1}{x^2};f''_{xy}(x,y)=0;f''_{yy}(x,y)=\frac{-1}{y^2}$$

Với (x,y) mà các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục ta có

$$d^2f=\frac{-1}{x^2}dx^2+2.0dxdy-\frac{1}{y^2}dy^2$$

4.4 CỰC TRỊ TỰ DO CỦA HÀM 2 BIẾN SỐ

I. Khái niệm cực trị

Cho hàm z = f(x, y) xác định trên miền D, $(x_0, y_0) \in D$.

Điểm (x_0, y_0) gọi là điểm cực đại (cực tiểu) của hàm f nếu tồn tại miền con $G \subset D$, $(x_0, y_0) \in G$ sao cho :

$$f(x,y) < f(x_0,y_0)\ (f(x,y) > f(x_0,y_0))\ ,\ \forall (x,y) \in G \setminus \{(x_0,y_0)\}$$

Điểm cực đại (cực tiểu) gọi chung là điểm cực trị và khi đó f(x, y) gọi là có cực đại (cực tiểu) hoặc nói chung là có cực trị tại điểm (x_0, y_0).

II.Định lý

Định lý 1

Giả sử f(x, y) có cực trị tại (x_0, y_0) và tại đó tồn tại các đạo hàm riêng thì $f'_x(x_0; y_0) = 0; f'_y(x_0; y_0) = 0$.

Điểm (x_0, y_0) gọi là điểm dừng.

Định lý 2

Cho f(x, y) có các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 liên tục trong miền D.Đặt:

$A = f''_{x^2}(x_0,y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C = f''_{y^2}(x_0,y_0)$, $\Delta = AC - B^2$ -

Nếu $\Delta < 0$ thì f(x, y) không có cực trị tại (x_0, y_0)

- Nếu $\Delta > 0$ và $A > 0$ thì hàm đạt cực tiểu tại (x_0, y_0)

- Nếu $\Delta > 0$ và $A < 0$ thì hàm đạt cực đại tại (x_0, y_0)

- Nếu $\Delta = 0$ thì f(x, y) có thể đạt hoặc không đạt cực trị tại (x_0, y_0)

Phương pháp tìm cực trị tự do

Bước 1: Tính các đạo hàm riêng cấp 1: $f'_x(x\ ,y\ ); f'_y(x, y\ )$

Bước 2: Tìm tất cả các điểm dừng của hàm f, tức là giải hệ:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

nghiệm của hệ là tọa độ các điểm dừng M_0.

Bước 3: Tính các đạo hàm riêng cấp 2 và đặt

$$A = f''_{xx}(M_0); \quad B = f''_{xy}(M_0); \qquad C = f''_{yy}(M_0)$$

Bước 4: Tính $\Delta = AC - B^2$ và kết luận

* Nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$ thì f đạt cực tiểu tự do tại M_0

* Nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases}$ thì f đạt cực đại tự do tại M_0

* Nếu $\Delta < 0$ thì hàm không đạt cực trị tại M_0

* Nếu $\Delta = 0$ thì ta chưa có kết luận về điểm M_0

VÍ DỤ 1 Tìm cực trị tự do của hàm số sau

$$f(x, y) = x^2 - xy - y^2 - 2x + y$$

BÀI GIẢI

Bước 1: Tính các đạo hàm riêng cấp 1

$f'_x(x,y) = 2x - y - 2;\ f'_y(x,y) = -x - 2y + 1$

Bước 2: Tìm tất cả các điểm dừng của hàm f tức là giải hệ:

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ -x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(1,0)$$

Bước 3: Tính các đạo hàm riêng cấp 2

$f''_{xx}(x,y) = 2;\ f''_{xy}(x,y) = -1;\ f''_{yy}(x,y) = -2$

Bước 4: Tính $\Delta = AC - B^2$ và kết luận

$A = f''_{xx}(1,0) = 2;\ B = f''_{xy}(1,0) = -1;\ C = f''_{yy}(1,0) = -2$

$\Rightarrow\ \Delta = AC - B^2 = 2(-2) - 1 = -5 < 0$

Suy ra hàm không có cực trị tự do tại $M_0(1,0)$

VÍ DỤ 2 Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

BÀI GIẢI

Bước 1: Tính các đạo hàm riêng cấp 1

$$f'_x = 3x^2 - 3y; f'_y = 3y^2 - 3x$$

Bước 2: Tìm tất cả các điểm dừng của hàm f

Giải hệ: $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Ta được 2 điểm dừng M(0, 0) , N(1, 1)

Bước 3: Tính các đạo hàm riêng cấp 2

$$f''_{x^2} = 6x\ ,\ f''_{yx} = -3\ ,\ f''_{y^2} = 6y$$

Bước 4: Tính $\Delta = AC - B^2$ và kết luận

* Tại M (0, 0) $\Rightarrow$ A = 0 , B = -3 , C = 0 $\Rightarrow$ Δ = - 9 < 0 nên hàm không có cực trị tại (0,0).

* Tại N (1, 1) $\Rightarrow$ A = 6 , B = -3 , C = 6 $\Rightarrow$ Δ = 27 > 0 và A > 0 nên hàm đạt cực tiểu và $f_{\text{cực tiểu}} = f(1, 1) = -1$

III. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm 2 biến

Cho hàm f(x, y) liên tục trên miền đóng, bị chặn D.

Khi đó f(x, y) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên D. Các giá trị đó có thể tìm theo quy tắc sau

Bước 1: Tìm các điểm dừng trong miền D và tính các giá trị của hàm tại các điểm dừng

Bước 2: Tìm các giá trị của hàm tại những điểm trên biên.

Bước 3: So sánh các giá trị chọn ra giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên miền D.

VÍ DỤ 3 Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ trong hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$ (D).

BÀI GIẢI

Bước 1: Tìm các điểm dừng trong miền D

$$f'_x = 2x - 1; f'_y = 4y \text{ ;Giải hệ: } \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Ta có điểm dừng $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \in D$ và $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$

Bước 2: Bây giờ ta xét giá trị của f trên biên

$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$

$\Rightarrow f = -x^2 - x + 2$ với $-1 \le x \le 1$ thì f(-1) = 2 ; f(1) = 0

$f'(x) = -2x - 1$; $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$;

$f''(x) = -2 < 0$ Như vậy trên biên:

f đạt giá trị lớn nhất tại $x = -\dfrac{1}{2}$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{4}$

f đạt giá trị nhỏ nhất tại x = 1 và f(1) = 0

Bước 3: So sánh 3 giá trị ta được

$$f_{min} = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}\ ,\ f_{max} = f\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

4.1 Tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ b) $z = x^2\sqrt{y} + x\ln y - \dfrac{1}{y}$

c) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

d) $z = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \lg(b^2 - y^2)$ (a, b là hằng số)

e) $z = \arcsin\dfrac{y-1}{x}$ f) $u = \sqrt{x + y + z}$

g) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}}$;($R > r > 0$)

4.2. Tính đạo hàm riêng cấp 1 và vi phân toàn phần cấp 1 của các hàm số sau

a) $z = x^2\sin^2 y$ b) $z = \arctan xy$ c) $z = \arcsin(x + y)$

d) $z = \sqrt[x]{e^y}$ e) $z = x^{y^2}$ f) $z = \dfrac{1}{y}\cos x^2$

g) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$ h) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

4.3. Chứng minh rằng

a) $z = y\ln(x^2 - y^2)$ thỏa $\dfrac{1}{x}z'_x + \dfrac{1}{y}z'_y = \dfrac{z}{y^2}$

b) $z = y^{\frac{y}{x}}\sin\dfrac{y}{x}$ thỏa $x^2 z'_x + xyz'_y = yz$

c) $u = (x - y)(y - z)(z - x)$ thỏa $u'_x + u'_y + u'_z = 0$

4.4. Tính đạo hàm của các hàm ẩn $y = y(x)$ cho bởi hệ thức

a) $x^2+4xy+2y^2-3x+2y=0$ b) $xy-\ln y=a$ (a là hằng số)

c) $xe^y+ye^x-e^{xy}=0$ d) $\sin xy-e^{xy}-x^2y=0$

4.5. Tính gần đúng các giá trị sau

a) $A=1,08^{3,96}$ b) $B=\ln\left(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\right)$

c) $C=\sqrt{(3,002)^2+(4,003)^2}$ d) $D=\arctan\dfrac{1,02}{0,95}$

4.6. Tính đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau

a) $z=x^3-4x^2y+5y+2$ b) $z=e^x\ln y+\sin y\ln x$

c) $z=\sin^2(ax+by)$ d) $z=\arcsin xy$

e) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ f) $z=y^{\ln x}$

4.7. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của các hàm số sau

a) $z=4x^2y+3xy^2+2$ b) $z=\ln xy$

c) $z=\sin(x+y)$ d) $z=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$

4.8. Tính các đạo hàm riêng z'_u, z'_v của các hàm hợp sau

a) $z=x^2+xy+y^2$ với $x=(u+v)^2$, $y=(u-v)^2$

b) $z=e^{x-2y}$ với $x=\sin u$, $y=u^2+v^2$

4.9. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$ b) $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ $(a,b>0)$

c) $z=x^3+3xy^2-15x-12y-6$ d) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2+1}$

e) $z=x^4y^3$ f) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$

g) $z=x^3+8x+y^2-2y+6$ h) $z=x^3+y^3-12x-3y+25$

i) $z=x^4-8x^2+y^2+10$ j) $z=x^4-y^4-4x+32y-9$

CHƯƠNG V
CHUỖI SỐ VÀ CHUỖI LŨY THỪA

5.1 CHUỖI SỐ
I. Các khái niệm và tính chất
1. Định nghĩa chuỗi số

Cho dãy số : $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Biểu thức tổng: $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ được gọi là chuỗi số

Ký hiệu: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ là các số hạng của chuỗi

u_n được gọi là số hạng tổng quát thứ n

$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ thì s_n là tổng riêng thứ n

Nếu tồn tại S = $\lim_{n\to\infty} S_n$ thì S được gọi là tổng của chuỗi.

S hữu hạn thì gọi là chuỗi số hội tụ .Ký hiệu: S = $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Nếu không tồn tại giới hạn hoặc S = $\pm\infty$ thì gọi là chuỗi phân kỳ. S- $S_n = R_n$ gọi là phần dư thứ n của chuỗi

VÍ DỤ 1 Cho các chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n+2} = \underbrace{\frac{3}{2}}_{n=0} + \underbrace{\frac{4}{3}}_{n=1} + \underbrace{\frac{7}{4}}_{n=2} + \ldots + \underbrace{\frac{n^2+3}{n+2}}_{shTQ:\ n=n} + \ldots$,

c) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{3n}{n-3} = \frac{12}{1}+\frac{15}{2}+\frac{18}{3}+\ldots+\frac{3n}{n-3}+\ \ldots$

VÍ DỤ 2 Xét sự hội tụ của chuỗi số cấp số nhân sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} a.q^n = a + a.q + \ldots + a.q^n + \ldots (q \neq 1) \qquad (2)$$

$\Rightarrow S_n = a + a.q + \ldots + a.q^n = a.\frac{q^n - 1}{q-1}$ là tổng riêng thứ n

Và $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a.\frac{q^{n-1}}{q-1} = \left[\begin{array}{ll} \frac{a}{1-q} & \textit{nếu } |q| < 1 \\ +\infty & \textit{nếu } |q| > 1 \end{array}\right.$

$S - S_n = a.q^{n+1} + a.q^{n+2} + \ldots$: là phần dư thứ n của chuỗi.

Tại q=1

$\sum_{n=0}^{\infty} a.1^n = a + a + a + \ldots + a + \ldots$ có $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$

Vậy chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a.q^n$ hội tụ khi $|q| < 1$ và phân kỳ khi $|q| \geq 1$

2. Điều kiện cần của chuỗi hội tụ

Nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ $\overset{thì}{\Rightarrow}$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Hệ quả: Nếu $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ phân kỳ

VÍ DỤ 3: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (3) gọi là ***chuỗi điều hòa***

Có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ nhưng chuỗi (3) phân kỳ

Vì ta có: $S_{2n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$

Và: $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \frac{1}{2} \neq 0$ Mà nếu (3) hội tụ

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ (do giới hạn là duy nhất) $\Rightarrow$ mâu thuẫn

3. Tiêu chuẩn Cauchy (Nguyên Lý Cauchy)

Định lý: Điều kiện cần và đủ để chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ là $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, $\exists n_o \in N$ sao cho $\forall p > q \geq n_o$ thì:

$$\left|S_p - S_q\right| = \left|\sum_{n=q+1}^{p} u_n\right| < \varepsilon.$$

4. Các tính chất về chuỗi hội tụ

Tính chất 1: Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng S

thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n (\alpha \in R)$ cũng hội tụ và có tổng αS

Tính chất 2: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và có tổng lần lượt là S, S' thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm v_n$ cũng hội tụ và có tổng là S $\pm$ S'

Chú ý:

- Tổng 2 chuỗi phân kỳ có thể hội tụ

VÍ DỤ 4 Cho 2 chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} -n$

$$\Rightarrow \text{chuỗi tổng } \sum_{n=1}^{\infty}(n-n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 \text{ hội tụ}$$

- Tổng của 1 chuỗi phân kỳ và 1 chuỗi hội tụ là phân kỳ.

Tính chất 3: Tính hội tụ hay phân kỳ của 1 chuỗi không thay đổi nếu ta thêm hoặc bớt đi 1 số hữu hạn các số hạng đầu tiên của chuỗi.

Nghĩa là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=m}^{\infty} u_n$ (m hữu hạn): có cùng tính hội tụ hay phân kỳ.

II. Chuỗi số dương

1. Định nghĩa: Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ là chuỗi số dương nếu mọi số hạng của nó đều là số dương(tức là $u_n > 0; \forall n$).

Nhận xét: Ta có $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} > S_n \Rightarrow \{S_n\}_n$ là dãy số tăng

$\Rightarrow$ Nếu: $\{S_n\}$ bị chặn trên tức $\exists \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow$ Chuỗi hội tụ

Nếu: $\{S_n\}$ không bị chặn trên tức $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty \Rightarrow$ Chuỗi phân kỳ

2. Các định lý dấu hiệu hội tụ:

a) Dấu hiệu 1(Tiêu chuẩn tích phân):

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

Nếu $\exists$ hàm số $f(x)$ xác định trên $(n_o,+\infty)$ sao cho $u_n = f(n), \forall n \geq n_o$ và $f(x)$ *liên tục, đơn điệu giảm* trên $(n_o,+\infty)$ thì $\int_{n_o}^{\infty} f(x)dx$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chú ý: Dấu hiệu này dùng cho những chuỗi số có số hạng tổng quát u_n có chứa luỹ thừa bậc n hoặc vô tỷ.

VÍ DỤ 5 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.\ln\ n}$ (5)

BÀI GIẢI

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{x.\ln x}$ $\forall x \geq 2$ là hàm số dương; liên tục, đơn điệu giảm.

Thật vậy: $f'(x) < 0$ với x đủ lớn $\Rightarrow f$ đơn điệu giảm.

Mà

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x.\ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{b\to\infty} \{\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)\} = +\infty$$

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x.\ln x} \text{ phân kỳ } \Rightarrow \text{ chuỗi (5) phân kỳ}$$

b) Dấu hiệu 2 (Dấu hiệu so sánh 1):

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Gỉa sử $u_n \le v_n \quad \forall n \ge n_o \in N$

Khi đó: - Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ* $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *hội tụ.*

-Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *phân kỳ* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *phân kỳ.*

CHÚ Ý: ***1)*** Ở mệnh đề 1 muốn xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, mà việc làm này khó thực hiện thì ta đánh giá số hạng TQ của chuỗi v_n sao cho: $0 \le u_n \le v_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ mà việc xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ dễ thực hiện, và kết quả là hội tụ thì ta kết luận chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ. Nhưng ngược lại nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ thì chúng ta không có kết luận gì.

2) Ngược lại ơ mệnh đề 2 muốn xét sự phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, mà việc làm này khó thực hiện thì ta đánh giá số hạng TQ của chuỗi u_n sao cho: $0 \le u_n \le v_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ mà việc xét sự phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dễ thực hiện, và kết quả là phân kỳ thì ta kết luận chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ. Nhưng ngược lại nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ thì chúng ta cũng không có kết luận gì.

VÍ DỤ 6 Xét sự hội tụ của chuỗi số (Chuỗi Riemann) hay

Chuỗi điều hòa tổng quát: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (α là hằng số) (6)

BÀI GIẢI

- Nếu $\alpha \leq 1$ thì

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{n^\alpha} \geq \dfrac{1}{n} \\ do \ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ phân\ kỳ \end{array}\right\} \overset{ss1}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ \ phân\ kỳ.$$

- Nếu $\alpha > 1$ Ta đặt : $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

  Khi đó $f(x) > 0 \quad \forall x \in [1, +\infty)$

  Và trên $[1, +\infty)$ hàm f(x) liên tục, đơn điệu giảm

Mà ta đã biết $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = 1$ là tích phân hội tụ $\overset{tctp}{\Rightarrow}$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ

Vậy Tổng Quát: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ***hội tụ*** khi $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Và ***phân kỳ*** khi $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$

VÍ DỤ 7 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n^2 + 2}$ (7)

BÀI GIẢI

Ta nhận thấy $\ln n < n, \quad \forall n \geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{\ln n}{n^3 + n^2 + 2} < \dfrac{n}{n^3 + n^2 + 2} < \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}, \quad \forall n \geq 1 \\ \text{mà } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ hội tụ (Chuỗi Riemann)} \end{array}\right\}$$

$$\stackrel{ss1}{\Rightarrow} \textit{Chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n^2 + 2} \textit{ hội tụ.}$$

VÍ DỤ 8 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n.\ln n}{n^2 - 1}$ (8)

BÀI GIẢI

Ta có: $\ln n > 1, \quad \forall n \geq 3$ (vì tính hội tụ và phân kỳ của chuỗi không thay đổi khi bớt 1 số hữu hạn các số hạng của chuỗi)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{n.\ln n}{n^2 - 1} > \dfrac{n}{n^2 - 1} > \dfrac{1}{n}; \ \forall n \geq 3 \\ \text{mà } \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ phân kỳ} \end{array}\right\}$$

$$\stackrel{ss1}{\Rightarrow} \textit{ chuỗi } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n.\ln n}{n^2 - 1} \textit{ phân kỳ.}$$

c) Dấu hiệu 3 (dấu hiệu so sánh 2):

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Nếu giới hạn: $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$

- $0 < k < \infty$: Thì hai chuỗi đã cho có cùng tính hội tụ hay phân kỳ
- k = 0 và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ
- k = $+\infty$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ phân kỳ
- **Ý nghĩa**: Muốn xét sự hội tụ của một trong 2 chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

hoặc $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$; chẳng hạn là $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ thì ta phải tìm thêm chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, mà việc xét tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ này dễ thực hiện sau đó ta áp dụng các kết quả của dấu hiệu.

VÍ DỤ 9 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=3}^{\infty} a.tg\frac{\pi}{n}$ (a là cosnt)(9)

BÀI GIẢI

Ta có: $\sum_{n=3}^{\infty} a.tg\frac{\pi}{n} = a\sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{tg\frac{\pi}{n}}_{u_n}$ và ta xét thêm chuỗi $\sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\frac{\pi}{n}}_{v_n}$

Nhận thấy: $u_n = tg\dfrac{\pi}{n} > 0, \forall n \geq 3$, suy ra chuỗi đã cho là chuỗi dương.

$$\left.Xét: \lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1 = k \text{ hữu hạn mà } \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\pi}{n} \quad \text{phân kỳ}\right\}$$

$$\overset{ss2}{\Rightarrow} \text{ chuỗi } a\sum_{n=3}^{\infty} tg\frac{\pi}{n} \left[\begin{array}{l} \text{phân kỳ nếu } a \neq 0 \\ \text{hội tụ nếu } a = 0. \end{array}\right.$$

VÍ DỤ 10 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2+n}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$ (10) (α là hằng số)

BÀI GIẢI

Ta thấy chuỗi đã cho có thể viết lại thành chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{4}{n^{\alpha}\left(\sqrt{2+n}+\sqrt{n-2}\right)}}_{u_n}$$

- Xét thêm chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\underbrace{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}_{v_n}}$ Theo ***tiêu chuẩn so sánh 2***

ta xét:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4.n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^{\alpha}\left(\sqrt{2+n}+\sqrt{n-2}\right)} = 4 \quad \text{(hằng số)}$$

- Mặt khác theo kết quả chuỗi **Riemann**

- nếu $\alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ hội tụ $\overset{ss2}{\Rightarrow}$ chuỗi (10) hội tụ

- nếu $\alpha + \frac{1}{2} \le 1 \Leftrightarrow \alpha \le \frac{1}{2}$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ phân kỳ $\overset{ss2}{\Rightarrow}$ chuỗi (10) phân kỳ

Vậy chuỗi (10) hội tụ khi $\alpha > \frac{1}{2}$ và phân kỳ khi $\alpha \le \frac{1}{2}$

d) Dấu hiệu 4 (Dấu hiệu D'Alembert):

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, giả sử $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$

Nếu $D < 1$: Chuỗi hội tụ

$D > 1$: Chuỗi phân kỳ

$D = 1$: Ta chưa có kết luận gì mà phải xét thêm bằng phương pháp khác

Chú ý: Dấu hiệu này dùng cho những chuỗi số có số hạng tổng quát u_n có chứa giai thừa.

VÍ DỤ 11 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (11)

BÀI GIẢI

Chú ý: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Xét

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left[(n+1)!\right]^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1$$

$\Rightarrow$ Chuỗi (11) hội tụ

VÍ DỤ 12 Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\frac{1}{2}+\frac{3!}{2.4}+\frac{5!}{2.4.6}+\ldots+\frac{(2n-1)!}{(2n)!!}+\ldots \qquad (12)$$

BÀI GIẢI

Ap dụng tiêu chuẩn (D')

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+2)!!}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n(2n+1)}{2n+2}=\infty$$

$\Rightarrow$ Chuỗi (12) phân kỳ

VÍ DỤ 13 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}tg\frac{1}{5^n}$ (13)

BÀI GIẢI

Đây là chuỗi dương, áp dụng t/c **D'Alember**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!tg\frac{1}{5^{n+1}}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n!tg\frac{1}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\frac{1}{5.5^n}}{(2n+1)(2n+2)\frac{1}{5^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5(2n+1)(2n+2)}=0\left(vì\ tg\frac{1}{5^n}\sim\frac{1}{5^n}\ \ khi\ n\to\infty\right)$$

Vậy chuỗi (13) hội tụ.

e) Dấu hiệu 5 (Dấu hiệu Cauchy)

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, giả sử $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$

Nếu $C < 1$: Chuỗi hội tụ

$C > 1$: Chuỗi phân kỳ

$C = 1$: Ta chưa có kết luận gì mà phải xét thêm bằng phương pháp khác

Chú ý: Dấu hiệu này dùng cho những chuỗi số có số hạng tổng quát u_n có chứa luỹ thừa bậc n.

VÍ DỤ 14 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$ (14)

BÀI GIẢI

Xét theo T/C (**C**) ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n \frac{1}{2} = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow$$ Chuỗi (14) phân kỳ.

VÍ DỤ 15 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$ (15)

BÀI GIẢI

Cách 1: Sử dụng (D)

Xét $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5 (2^n + 3^n)}{(2^{n+1} + 3^{n+1}) n^5} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$$

chuỗi (15) hội tụ

Cách 2: Sử dụng (C). Nhận thấy

$$\left.\begin{array}{l} Ta\ có \quad \dfrac{n^5}{2^n+3^n} < \dfrac{n^5}{2^n} \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^5}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^5}}{2} = \dfrac{1}{2} < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n} \text{ hội tụ}$$

$\Rightarrow$ chuỗi (15) hội tụ

VÍ DỤ 16 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ (16)

BÀI GIẢI

Cách 1: Sử dụng (D)

Cách 2: Sử dụng điều kiện cần:từ

$\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} > \dfrac{n^n}{(n+1)^n}$ nên

$$\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} > \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e} \neq 0$$

Theo điều kiện đủ $\Rightarrow$ chuỗi (16) phân kỳ

VÍ DỤ 17 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ (17)

BÀI GIẢI Xét

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{-\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{-2(n-1)}{n+1}} = e^{-2} < 1$$

Theo TC (C) $\Rightarrow$ chuỗi (17) hội tụ

VÍ DỤ 18 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n$ (18)

BÀI GIẢI

Sử dụng (D): Xét

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!.e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e.n^n}{(n+1)^{n+1}} = 1$$

Ta chưa kết luận được gì.

Chú ý: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty;\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n} = \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0, a > 0;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0, a > 0$$

- Nếu xét điều kiện cần $\lim_{n\to\infty} u_n$ khó khăn

Và xét theo dấu hiệu (D), (C): D = C = 1 không kết luận được gì.

- Thì ta có thể xét BĐT: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad \forall n \geq n_o$ nào đó

Nghĩa là từ n_o nào đó trở đi thì dãy $\{u_n\}$ đơn điêu tăng

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \overset{\text{đk cần}}{\Rightarrow} \text{ chuỗi phân kỳ}$$

* Áp dụng vào VÍ DỤ 18: Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1 \quad \forall n$$

(Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$).

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ chuỗi (18) phân kỳ.

III. Chuỗi có dấu bất kỳ

1.Chuỗi đan dấu

a) Định nghĩa**:** Chuỗi đan dấu là chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n U_n \qquad ;U_n > 0,\ \forall n \geq 1$$

VÍ DỤ 19 Cho các chuỗi đan dấu

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2-1} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{n=2} - \underbrace{\frac{3}{8}}_{n=3} + \underbrace{\frac{4}{15}}_{n=4} - \underbrace{\frac{5}{24}}_{n=5} + \ . \ . \ .$

$$+(-1)^n \frac{n}{n^2-1} + \ . \ . \ .$$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} \ldots$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{3^n}{n^3}$

b) Định lý(Dấu hiệu LEIBNITZ).

Cho chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$. Nếu dãy $\{u_n\}$ đơn điệu giảm $(u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots)$ Và $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ thì ***chuỗi hội tụ*** và có **tổng** $S < |u_1|$.

VÍ DỤ 20 Xét sự hội tụ của chuỗi sau $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ (20)

BÀI GIẢI

$$\left.\begin{array}{l} Có\ \ dãy\ \left\{\frac{1}{n}\right\}_n\ là\ dãy\ đơn\ điệu\ giảm \\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \overset{tc\ (L)}{\Rightarrow}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ hội tụ và $S \le 1$

VÍ DỤ 21 Xét sự hội tụ của chuỗi sau $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ (21)

BÀI GIẢI

Ta có dãy $\{u_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right\}_n$ là dãy đơn điệu giảm.

Nhưng $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0 \overset{đk\ cần}{\Rightarrow}$ Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ (21) phân kỳ

VÍ DỤ22 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ (22)

BÀI GIẢI

(22) là chuỗi đan dấu . Xét

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{100}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^n = 0 \qquad (*)$$

Ta có $\left\{a_n\right\} = \left\{\frac{2}{3} + \frac{298}{3(3n+1)}\right\}$ là dãy đơn điệu giảm (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ (22) hội tụ

VÍ DỤ23 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)\frac{n-1.\ln n}{n}$ (23)

BÀI GIẢI

Xét hàm $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0 \quad \forall x \geq 3$

$\Rightarrow$ *f(x)* là hàm đơn điệu giảm $\forall x \geq 3$

$\Rightarrow$ $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ là dãy đơn điệu giảm $\forall n \geq 3$

Và $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0 \overset{tc(L)}{\Rightarrow} \textit{chuỗi} \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ hội tụ.

Chú ý: Trên đây ta phải chuyển sang hàm số $f(x)$ vì khi đó TXĐ của hàm là $\mathbb{R}^+$, là tập số liên tục thì ta mới có thể xét tính liên tục và tính có đạo hàm của hàm số. Khi đó ta mới xét được tính đơn điệu, và chuyển sang dãy $\left\{u_n\right\}$ thì chỉ là 1 Th đặc biệt của hàm f(x) với những x nhận giá trị nguyên.

2. Chuỗi có dấu bất kỳ

a) Định lý: Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$ ***hội tụ*** $\overset{thì}{\Rightarrow}$ thì $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ cũng ***hội tụ***

b) Định nghĩa:

- Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$ ***hội tụ*** thì $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ được gọi là ***hội tụ tuyệt đối.***

-Nếu $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}u_n \ \text{hội tụ} \\ \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \ \text{phân kỳ} \end{cases}$ thì $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ được gọi là ***bán hội tụ***

c) Các tính chất của chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Ý nghĩa: Xét tính hội tụ của chuỗi có DẤU BẤT KỲ chúng ta không có tiêu chuẩn nào, mà chúng ta phải chuyển sang xét **chuỗi trị tuyệt đối** tức là chuỗi DƯƠNG khi đó ta sử dụng tất cả các tiêu chuẩn của chuỗi dương.

- Nếu chuỗi trị tuyệt đối hội tụ thì ta suy ra chuỗi có dấu bất kỳ hội tụ
- Nếu chuỗi trị tuyệt đối phân kỳ thì ta không có kết luận gì cho chuỗi có dấu bất kỳ, ta phải sủ dụng các phương pháp khác.

VÍ DỤ 24 Xét sự hội tụ của chuỗi sau $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2}$ (24)

BÀI GIẢI

Chuỗi (24) là chuỗi có dấu bất kỳ, Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{|\cos(n\pi)|}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2} \\ \text{mà } \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} \end{array}\right\} \stackrel{ss1}{\Rightarrow} \text{chuỗi dương } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos(n\pi)|}{n^2} \text{ hội}$$

tụ $\stackrel{ĐL}{\Rightarrow}$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2}$ (24) hội tụ.

Chú ý: $\left.\begin{matrix} \textit{Nếu xét } \dfrac{\cos n\pi}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \textit{ hội tụ} \end{matrix}\right\} \textit{không}$ suy ra

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2}$ hội tụ vì chuỗi số không phải là chuỗi số dương

VÍ DỤ 25 Xét sự hội tụ của chuỗi sau $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ (25)

BÀI GIẢI

Theo dấu hiệu (L) thì chuỗi (25) hội tụ nhưng chuỗi

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ thì $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ *bán hội tụ.*

VÍ DỤ 26 Xét sự hội tụ của chuỗi sau $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\alpha}}$ (26)

BÀI GIẢI

Theo dấu hiệu (L) thì chuỗi (26) hội tụ khi $\alpha > 0$, phân kỳ khi $\alpha \le 0$.

Nhưng $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^{\alpha}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ sẽ $\begin{cases} \textit{hội tụ khi } \alpha > 1 \\ \textit{phân kỳ khi } \alpha \le 1 \end{cases}$

Vậy chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\alpha}} : \begin{cases} \textit{hội tụ tuyệt đối khi } \alpha > 1 \\ \textit{bán hội tụ khi } \quad 0 < \alpha \le 1 \\ \textit{phân kỳ khi } \quad \alpha \le 0. \end{cases}$$

5.2 CHUỖI HÀM BẤT KỲ

I. Định nghĩa

1. Định nghĩa chuỗi hàm

Cho một ***dãy vô hạn các hàm số***:

$u_o(x), u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$

Ta gọi tổng của chúng là một ***chuỗi hàm*** và ký hiệu :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_o(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

Cho $x = x_o$ (x_o là 1 số cụ thể) ta được chuỗi số:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_o) \qquad (2)$$

(Vậy **chuỗi số** là một trường hợp đặc biệt của **chuỗi hàm** khi cho $x = x_0$)

- Nếu chuỗi số (2) hội tụ thì x_o được gọi là ***điểm hội tụ*** của chuỗi hàm và khi đó hàm được gọi là hội tụ điểm tại x_0.
- Nếu chuỗi số (2) phân kỳ thì x_o được gọi là ***điểm phân kỳ*** của chuỗi hàm.
- Tập tất cả các điểm hội tụ x_o (nếu có) của chuỗi được gọi là ***miền hội tụ***: $X = \{ x_0 /\ x_0 \text{ là điểm hội tụ} \}$

2 .Định nghĩa tổng riêng thứ n

Gọi $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = u_o(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ là ***tổng riêng thứ n*** của chuỗi hàm.

Gọi $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ là tổng của chuỗi (nếu giới hạn này xác định và S(x) xác định trong miền hội tụ của chuỗi hàm).

Ký hiệu:

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ và nói chuỗi hàm (1) hội tụ về hàm S(x)

Gọi $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$: là ***phần dư thứ n*** của chuỗi hàm.

VÍ DỤ Cho các chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + .. + \frac{x^n}{n+1} + \ldots$

c) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sin nx}{3n^2} = \frac{\sin 4x}{3.4^2} + \frac{\sin 5x}{3.5^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{3n^2} + \ldots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\sqrt{n}} = \frac{x+1}{1} + \frac{(x+1)^2}{2\sqrt{2}} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{n\sqrt{n}} + \ldots$

II. VÍ DỤ Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Trường hợp 1: Với x = 1 thì chuỗi $(1) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ chuỗi hội tụ

Trường hợp 2: Với $x \neq 1$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{2n+1} . \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \right|} = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = u(x)$$

Giải BPT $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x} - 1 < 0 \\ \dfrac{1-x}{1+x} + 1 > 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x > 0$

Tại $x = 0$ ta có chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ chuỗi này bán hội tụ

Vậy: Miền hội tụ của chuỗi là X $= [0, +\infty)$

$x = 0$ chuỗi bán hội tụ, $x > 0$ chuỗi hội tụ tuyệt đối

5.3. CHUỖI LŨY THỪA

I. Định nghĩa

Chuỗi hàm có dạng $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$ (1)

Trong đó $a \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots\ x_o = \mathrm{const}$ cho trước được gọi là ***chuỗi lũy thừa***.

Đặc biệt nếu $x_o = 0$ tức (1) có dạng $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ (2)

Nếu đặt $X = x - x_o$ thì (1) có dạng $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ (2)

Do đó khi nói đến chuỗi lũy thừa thì ta chỉ cần nghiên cứu dạng (2): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

II. Cách tìm bán kính hội tụ

1. Định lý ABEL (Tập hội tụ tuyệt đối của chuỗi lũy thừa)

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = \alpha \neq 0$ và phân kỳ tại $x = \beta$, thì chuỗi (2) hội tụ tuyệt đối tại $\forall x$ mà $|x| < \alpha$ và chuỗi (2) phân kỳ tại $\forall x$ mà $|x| > \beta$

Còn tại $x = \pm\alpha$; $x = \pm\beta$ thì thay trực tiếp vào chuỗi hàm trở thành các chuỗi số và xét tính hội tụ tuyệt đối của các chuỗi số thông thường.

2. Định nghĩa bán kính hội tụ

Số R được gọi là ***bán kính hội tụ*** của chuỗi (2) nếu chuỗi (2) hội tụ khi $|x| < R$ và phân kỳ khi $|x| > R$.

Nhận xét:

- Từ định nghĩa trên muốn tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa thì ta:

  Bước 1: Tìm bán kính hội tụ R

  Bước 2: Xét sự hội tụ của chuỗi (2) tại $x = \pm R$ (thay trực tiếp vào chuỗi hàm)

Khi đó ta có kết luận cho miền hội tụ của R là một trong các khỏang sau: $(-R, R), [-R, R), (-R, R], [-R, R]$

3.Quy tắc tìm bán kính hội tụ(ĐL Cauchy hoặc D'AlemberT)

Xét chuỗi (2)

Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ hoặc $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$ thì bán kính hội tụ của (2) được tính theo công thức là

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{l} & khi\ \ 0 < l < +\infty \\ 0 & khi \quad\ \ l = +\infty \\ +\infty & khi \quad\ \ l = 0 \end{cases}$$

VÍ DỤ 1 Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 = R \Rightarrow l = \frac{1}{R} = 1 \Rightarrow chuỗi\ (1)$$

hội tụ trên (-1,1)

Xét: Tại $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ chuỗi số phân kỳ.

Tại $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ chuỗi số hội tụ theo (LN).

$\Rightarrow$ Vậy miền hội tụ của chuỗi (1) là $[-1,1)$

VÍ DỤ 2 Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{n+1}\right)^n \qquad (2)$$

BÀI GIẢI

Từ (2) $\Rightarrow a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

Ta có theo dấu hiệu **Cauchy** thì

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}=1=l\ \Rightarrow R=\frac{1}{l}=1$$

Chuỗi (2) hội tụ trên $\left(-1,1\right)$.

- Xét: Tại x = 1 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ chuỗi số phân kỳ

theo điều kiện đủ vì :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\frac{n}{-(n+1)}}=e^{-1}$$

- Tại $x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ cũng phân kỳ theo

đinh lý LEIBNITZ.

$\Rightarrow$ Vậy miền hội tụ của chuỗi (2) là $\left(-1,1\right)$.

VÍ DỤ 3 Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(x+1\right)^n \qquad (3)$$

BÀI GIẢI

$$(3)\Rightarrow\ a_n=\frac{3^n}{n}\quad và\quad X=x+1$$

Ta đưa chuỗi (3) trên về dạng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}X^n$ (*)

Áp dụng dấu hiệu D'Alembert ta xét:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{n+1}.\frac{n}{3^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}.\frac{3^{n+1}}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}.\frac{3.3^n}{3^n}=3$$

Suy ra bán kính hội tụ $\Rightarrow R=\frac{1}{l}=\frac{1}{3}$

Vậy chuỗi (*) hội tụ trên miền $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Bây giờ ta phải xét tại hai đầu mút

* Tại $X=-\frac{1}{3}$

Chuỗi $(*)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

Ta lại có: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo Leibnitz

- Tại $X=\frac{1}{3}$

Chuỗi $(*)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ chuỗi số phân kỳ theo TCTP

Ta có miền hội tụ của chuỗi (*) là $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

Cuối cùng ta có miền hội tụ của chuỗi (3) là

$$-\frac{1}{3}< X<\frac{1}{3}\Leftrightarrow -\frac{1}{3}< x+1<\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{4}{3}< x< -\frac{2}{3}.$$

VÍ DỤ 4 Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-2\right)^{n}}{n}\left(x+1\right)^{n} \qquad (4)$$

BÀI GIẢI

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-2\right)^{n}}{n}\left(x+1\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}2^{n}}{n}\left(x+1\right)^{n} \qquad (4)$$

$$(4)\Rightarrow \ a_n=\frac{(-1)^n2^n}{n} \quad và \quad X=x+1$$

Ta đưa chuỗi (3) trên về dạng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}2^{n}}{n}X^{n}$ (*)

Áp dụng dấu hiệu D'Alembert ta xét:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}.\frac{n}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}.\frac{2^{n+1}}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}.\frac{2.2^n}{1+2^n}=2$$

Suy ra bán kính hội tụ $\Rightarrow R=\frac{1}{l}=\frac{1}{2}$

Vậy chuỗi (*) hội tụ trên miền $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Bây giờ ta phải xét tại hai đầu mút

* Tại $X = -\frac{1}{2}$

$$Chuỗi\ (4) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(-1\right)^n 2^n (-1)^n}{n\,2^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Ta lại có: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ theo TCTP

- Tại $X = \frac{1}{2}$

$$Chuỗi\ (4) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n 2^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(1)^n}{n}$$

Ta có: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}$ chuỗi hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz.

Ta có miền hội tụ của chuỗi (*) là $-\frac{1}{2} < X \le \frac{1}{2}$

Cuối cùng ta có miền hội tụ của chuỗi (4) là

$$-\frac{1}{2} < X \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x + 1 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x \le \frac{-1}{2}.$$

VÍ DỤ 5. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\ (5)$$

BÀI GIẢI

Ta có: $a_n = \dfrac{1}{3^n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ: $R = 3$

$\Rightarrow$ Khoảng hội tụ: $(-3,3)$

\+ Tại $x = 3$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ có $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}1 = 1 \neq 0$

nên chuỗi phân kỳ theo điều kiện đủ

\+ Tại $x = -3$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

là chuỗi đan dấu có $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}1 = 1 \neq 0$

nên chuỗi phân kỳ dấu hiệu Leibnitz

Vậy miền hội tụ là $(-3,3)$.

VÍ DỤ 6 Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n\left(3n^2+1\right)}$

BÀI GIẢI

Ta có: $a_n = \dfrac{1}{2^n\left(3n^2+1\right)} \Rightarrow$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}\left[3(n+1)^2+1\right]} = \frac{1}{2.2^n\left(3n^2+6n+4\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(3n^2+1\right)}{2.2^n\left(3n^2+6n+4\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n^2+1\right)}{2\left(3n^2+6n+4\right)} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ: $R = 2$

$\Rightarrow$ Khoảng hội tụ: $(-2,2)$

\+ Tại $x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(3n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+1}$

Vì $\frac{1}{3n^2+1} < \frac{1}{3n^2} < \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là chuỗi hội tụ theo TCTP (vì $\alpha = 2 > 1$).

Nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+1}$ chuỗi hội tụ theo SS1

\+ Tại $x = -2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n(3n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+1}$

có $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n^2+1} = 0$

là chuỗi đan dấu hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz.

Vậy miền hội tụ là $[-2,2]$.

VÍ DỤ 7 Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(3n^2-1)}$ (7)

BÀI GIẢI

Ta có: $a_n = \frac{1}{2^n(3n^2-1)}$ $\Rightarrow$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}\left[3(n+1)^2-1\right]} = \frac{1}{2.2^n(3n^2+6n+2)}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(3n^2-1\right)}{2.2^n\left(3n^2+6n+2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n^2-1\right)}{2\left(3n^2+6n+2\right)}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ: $R=2$

$\Rightarrow$ Khoảng hội tụ: $\left(-2,2\right)$

+ Tại $x=2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\left(3n^2-1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-1}$

Vì $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ là chuỗi hội tụ theo TCTP (vì $\alpha=2>1$).

Ta có $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n^2+1}:\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+1}=\frac{1}{3}$

Nên $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+1}$ chuỗi hội tụ theo SS2

+ Tại $x=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-2\right)^n}{2^n\left(3n^2-1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{3n^2-1}$

có $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n^2-1}=0$

là chuỗi đan dấu hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz.

Vậy miền hội tụ là $\left[-2,2\right]$.

VÍ DỤ 8 Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-2\right)^n}{n2^n}\quad(8)$$

BÀI GIẢI

Đặt $X = x - 2$ thì (8) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n2^n} \quad (*)$

Ta có: $a_n = \frac{1}{n2^n} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ của chuỗi $(*)$: $R = 2$

$\Rightarrow$ Khoảng hội tụ: $(-2,2)$

+ Tại $X = 2$: $(*) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi điều hòa nên chuỗi phân kỳ.

+ Tại $X = -2$: $(*) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là chuỗi đan dấu hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz.

Vậy miền hội tụ $(*)$ là $-2 \le X < 2$

Vậy miền hội tụ (8) là

$-2 \le X < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \le x - 2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x < 4$

III. Khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa

1.Khái niệm

Hàm số *f(x)* khả vi vô hạn lần tại x_0 và lân cận x_0 và *f(x)* có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của một chuỗi luỹ thừa trong lân cận ấy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0)^1 + a_2 (x - x_0)^2 + \ . \ . \ .$$

$$+ a_n (x - x_0)^n + . \ . \ .$$

Lấy đạo hàm cấp n cả 2 vế thì ta được

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}; \quad \forall n = 0,1,2,3,...$$

Như vậy:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \qquad \text{Chuỗi } \textbf{Taylor}$$

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n \qquad \text{Chuỗi } \textbf{Maclaurin}$$

* Nếu chuỗi Taylor của hàm *f(x)* ở lân cận điểm x_0 **hội tụ về hàm** *f(x)* thì ta nói hàm *f(x)* khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm x_0.

2. Điều kiện để một hàm khai triển thành chuỗi luỹ thừa

ĐỊNH LÝ 1 Nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của điểm x_0 và $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

trong đó phần dư $R(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{\text{phần dư Lagrange}}$ và α là số nằm giữa x *và* x_0 thì hàm số $f(x)$ khai triển được thành chuỗi luỹ thừa trong lân cận điểm x_0.

ĐỊNH LÝ 2 Nếu trong lân cận của điểm x_0 hàm $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp, và

$$\left|f^{(n)}(\alpha)\right| \le M \ , \forall\, \alpha \text{ là số nằm giữa } x \text{ và } x_0$$

thì hàm số $f(x)$ khai triển được thành chuỗi luỹ thừa trong lân cận điểm x_0.

VÍ DỤ 1 Khai triển hàm sau thành chuỗi luỹ thừa của x:

$$f(x)=e^x$$

BÀI GIẢI

Ta thấy hàm *f(x)* có đạo hàm mọi cấp tại $\forall x\in\mathbb{R}$, và $f^{(n)}(0)=1$, $\forall n$ Vậy chuỗi luỹ thừa của hàm là:

$$f(x)=e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ ...+\frac{1}{n!}x^n+...$$

Giả sử A là một số dương bất kỳ, Ta có $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in(-A,A)$ thì

$\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x<e^A:=M$ tức là đạo hàm bậc n luôn bị chặn, theo định lý thì hàm số đã cho khai triển được thành chuỗi luỹ thừa trong lân cận $(-A,A)$ tại $x_0=0$. Nhưng A là số bất kỳ nên hàm khai triển được trên toàn bộ trục số.

VÍ DỤ 2 Khai triển hàm sau thành chuỗi luỹ thừa của x:

$$f(x)=\sin x$$

BÀI GIẢI

Tương tự ta có kết quả khai triển của các hàm số sau theo chuỗi luỹ thừa là:

$$f(x)=\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7-\ ...$$

$$\underbrace{+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}}_{\text{số hạng TQ}}+...;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

VÍ DỤ 3 Khai triển hàm sau thành chuỗi luỹ thừa của x:

$$f(x)=\cos x$$

BÀI GIẢI

Tương tự ta có kết quả khai triển

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \ldots$$

$$\underbrace{+\left(-1\right)^n \frac{1}{\left(2n\right)!}x^{2n}}_{\text{số hạng TQ}} + \ldots;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

VÍ DỤ 4 Khai triển hàm sau thành chuỗi luỹ thừa của x:

$$f\left(x\right) = \left(1+x\right)^\alpha$$

BÀI GIẢI

Tương tự ta có kết quả khai triển

$$f\left(x\right) = \left(1+x\right)^\alpha = 1\frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2!}x^2 - \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)}{3!}x^3 +$$

$$+\ldots + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\ldots\left(\alpha-n+1\right)}{n!}x^n + \ldots$$

Để tìm khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa trên ta tính:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\ldots\left(\alpha-n+1\right).\left(n-1\right)!}{n!\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\ldots\left(\alpha-n\right)}.\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n+1}{n}\right| = 1$$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi R = 1 $\Rightarrow$ chuỗi chỉ hội tụ khi $\left|x\right| < 1$

Tại $x = 1$ chuỗi phân kỳ; Tại $x = -1$ chuỗi hội tụ

Như vậy trong nửa khoảng $[-1,1)$ chuỗi hội tụ và hội tụ tới hàm $f\left(x\right) = \left(1+x\right)^\alpha$.

Hay nói cách khác hàm số $f\left(x\right)=\left(1+x\right)^{\alpha}$ chỉ khai triển được thành chuỗi khi $\forall x\in[-1,1)$ và

$$f\left(x\right)=\left(1+x\right)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\ldots\left(\alpha-n+1\right)}{n!}x^{n}.$$

VÍ DỤ 4 Khai triển hàm sau thành chuỗi luỹ thừa của x:

$f(x)=\ln\left(x+1\right)$

BÀI GIẢI

Tương tự ta có kết quả khai triển

$$\ln\left(x+1\right)=x-\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{3}x^{3}-\ldots+\underbrace{\left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n}}_{sh\ tổng\ quát}+\ldots;$$

$\forall x\in\left(-1,1\right)$

VÍ DỤ 5 Khai triển hàm sau thành chuỗi luỹ thừa của x:

$$f(x)=arctgx$$

BÀI GIẢI

Tương tự ta có kết quả khai triển

$$f(x)=arctgx=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}+\ldots;$$

$\forall x\in\left[-1,1\right]$

VÍ DỤ 6 Khai triển hàm sau thành chuỗi luỹ thừa của x:

$$f(x)=arccotgx$$

BÀI GIẢI

Tương tự ta có kết quả khai triển

$$arccotgx=1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{4}-\ldots+\left(-1\right)^{n}\frac{1}{2n}x^{2n}+\ldots;\quad\forall x\in\left[-1,1\right]$$

3. Ứng dụng các khai triển của hàm trên theo chuỗi để tính xấp xỉ tích phân.

VÍ DỤ Tính $I = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx = ?$

BÀI GIẢI

Ta có khai triển hàm số

$$f\left(x\right) = e^{-x^2} = 1 - \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \ . \ . \ .$$

$$+\left(-1\right)^n \frac{1}{n!}x^{2n} + . \ . \ .;\forall x \in \mathbb{R}$$

Vì vậy ta lấy tích phân theo cận trên như sau:

$$I_x = \int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{1}{1!.3}x^3 + \frac{1}{2!.5}x^5 - \frac{1}{3!.7}x^7 + \ . \ . \ .$$

Vậy

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{1!.3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!.5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!.7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \ . \ . \ .$$

5.4 CHUỖI FOURIER

I. Khái niệm về chuỗi lượng giác – chuỗi Fourier

1. Chuỗi lượng giác

- Chuỗi ***lượng giac*** là chuỗi hàm có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \text{ (1)}$$

trong đó $a_0, a_n, b_n \left(\forall n = 1,2,3,...\right)$ là những hằng số. Số hạng TQ của chuỗi là: $u_n\left(x\right) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{n}$ liên tục và có đạo hàm mọi cấp. Vì vậy chuỗi (1) hội tụ và tổng của nó là một hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ và có: $\left|u_n\left(x\right)\right| \le \left|a_n\right| + \left|b_n\right|; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$

- Người ta chứng minh được rằng nếu các dãy số $\left\{a_n\right\}; \left\{b_n\right\}$ giảm và dần tới 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi (1) hội tụ tại $x \ne 2k\pi$ và các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì theo định lý **Weierstrass** thì chuỗi (1) hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbb{R}$.

2. Chuỗi Fourier

- Hàm $f\left(x\right)$ được khai triển thànhchuỗi (1) trên đoạn $\left[-\pi, \pi\right]$ và các hệ số được tính theo CT:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \quad \forall n = 1,2,3,\ldots$$

Thì được gọi là ***chuỗi Fourier,*** và các hệ số $a_0;\ a_n;\ b_n$ được gọi là các hệ số Fourier.

Một số hệ thức Fourier:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx = 0$ 2. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx = 0$ *nếu* $k \neq 0$

3. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx.\sin pxdx = 0$

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx.\cos pxdx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \neq p \\ \pi & \text{nếu } k = p \neq 0 \end{cases}$

5. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx.\sin pxdx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \neq p \\ \pi & \text{nếu } k = p \neq 0 \end{cases}$

II. Điều kiện để hàm số khai triển được thành chuỗi Fourier

1. Định lý Dirichlet: Hàm $f(x)$ ***tuần hoàn với chu kỳ*** 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi,\pi]$ thì chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ trên $[-\pi,\pi]$ và:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \textit{ nếu } f(x) \textit{ liên tục tại } \forall x\neq c\\ \dfrac{f(c+0)+f(c-0)}{2} \quad \textit{ nếu } f(x) \textit{ gián đoạn loại 1 tại } \forall x=c\end{cases}$$

2. Định nghĩa: Khi chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ về chính $f(x)$ thì ta nói hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier, và khi đó ta viết:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right);$$

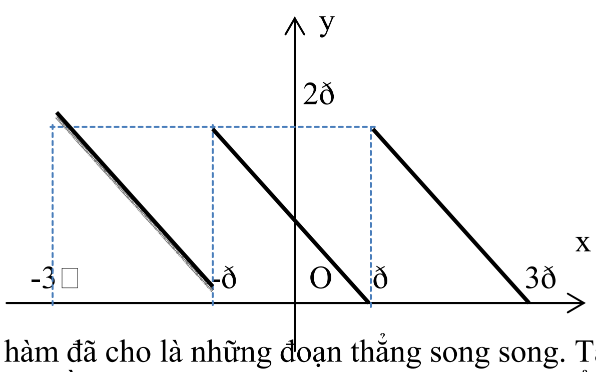
trong đó $a_o\ a_n,\ b_n$ là các hệ số Fourier

3. Các trường hợp khai triển thành chuỗi Fourier

a) Khai triển hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π trên $[-\pi,\pi]$ thành chuỗi Fourier

VÍ DỤ 1 : Cho hàm $f(x)=\pi-x$ trên đoạn $[-\pi,\pi]$ và tuần hoàn với chu kì 2π . Hãy khai triển f(x) thành chuỗi Fourier.

BÀI GIẢI



Đồ thị của hàm đã cho là những đoạn thẳng song song. Ta có f thỏa mãn các điều kiện của định lí Dirichlet nên khai triển được thành chuỗi Fourier.

Ta tính các hệ số Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)dx = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin nxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx = (-1)^n\frac{2}{n}$$

Với $(n = 1, 2, 3, ...)$. Vậy khai triển Fourier của hàm số đã cho là

$$f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx \quad , \forall x \neq \pi + k2\pi,\ k \in Z.$$

VÍ DỤ 2 Khai triển hàm $f(x) = x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π trên $[-\pi, \pi]$ thành chuỗi Fourier

BÀI GIẢI

Ta có

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi^2 - \pi^2\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x.\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x.\sin nxdx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right] = (-1)^n\frac{2}{n}, \qquad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Vậy tại các điểm $x \neq \pm\pi$ thì

$$f(x) = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{\sin nx}{n} + \ldots\right]$$

Chú ý rằng tại $x = \pm\pi$ tổng của chuỗi là:

$$f(\pm\pi) = \frac{1}{2}\left[f(\pm\pi + 0) + f(\pm\pi - 0)\right] = 0.$$

VÍ DỤ 3 Tìm khai triển *Fourier* của $\sin\frac{x}{2}$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

BÀI GIẢI

Ta có: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\frac{x}{2} dx = 0$ ($f(x)$ là hàm lẻ)

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\frac{x}{2}\cos nx dx = 0$ ($\sin\frac{x}{2}\cos nx$ là hàm lẻ)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\frac{x}{2}\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)x - \cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{2}{2n-1}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\frac{2}{2n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} - \frac{(-1)^n}{2n+1}\right] = (-1)^n \frac{4n}{\pi(4n^2-1)}$$

Thay vào *(1)*

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{4n^2-1}\sin nx \qquad (-\pi \le x \le \pi)$$

b) Khai triển hàm $f\left(x\right)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π trên $\left[0,2\pi\right]$ thành chuỗi Fourier

VÍ DỤ 4 Khai triển hàm $f\left(x\right)=x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π trên $\left[0,2\pi\right]$ thành chuỗi Fourier

BÀI GIẢI

Trước hết ta nhận thấy rằng hàm $f\left(x\right)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π thì:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)dx = \int_{a}^{a+2\pi} f\left(x\right)dx;\ \textit{với a là hằng số bất kỳ.}$$

Và các hệ số Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} xdx = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\cos nxdx = \frac{1}{\pi n}.\frac{\cos n\pi}{n}\bigg|_{0}^{2\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x.\sin nxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\bigg|_{0}^{2\pi}\right] = -\frac{2}{n}, \qquad \forall n = 1,2,3,\ldots$$

Vậy tại các điểm $x \neq 2k\pi$

$$f(x)=\pi-2\left[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ ...\ +\frac{\sin nx}{n}+\ ...\right]$$

Chú ý rằng tại $x=2k\pi$ tổng của chuỗi là:

$$f(2k\pi)=\frac{1}{2}\left[f(2k\pi+0)+f(2k\pi-0)\right]=\pi;\quad \forall k\in\mathbb{Z}.$$

VÍ DỤ 5 Khai triển hàm $f(x)=\begin{cases}0 & nếu\ -\pi\le x<0\\ x & nếu\ 0\le x<\pi\end{cases}$

tuần hoàn với chu kỳ 2π trên $\left[0,2\pi\right]$ thành chuỗi Fourier

BÀI GIẢI

Trước hết ta nhận thấy rằng hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π và các hệ số Fourier:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_{0}^{\pi}xdx\right]=\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx\right]=\frac{1}{\pi n}.\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x.\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} = \left(-1\right)^{n+1} \frac{1}{n}, \qquad \forall n = 1,2,3,\ldots$$

Vậy tại các điểm $x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \ldots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots\right] +$$

$$+\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right]$$

Chú ý rằng tại $x = (2k+1)\pi$ tổng của chuỗi là:

$$f(\pm 2\pi) = \frac{1}{2}\left[f(\pm 2\pi + 0) + f(\pm 2\pi - 0)\right] = \frac{\pi}{2};\quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

c) Khai triển hàm f(x) tuần hoàn với chu kỳ 2l thành chuỗi Fourier

Chúng ta sẽ tìm cách đưa hàm số $f(x)$ về dạng hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π bằng cách đổi biến số: $x' = \frac{\pi}{l}x$. khi đó hàm $f(x) = f\left(\frac{\pi}{l}x'\right) := F(x')$

Lúc đó hàm $F(x')$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π và thoả các điều kiện của một hàm khai triển được thành chuỗi Fourier, và khi đó các hệ số Fourier được tính theo CT:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad \forall n = 1,2,3,\ldots$$

VÍ DỤ 6 Khai triển hàm $f(x) = x^2$ tuần hoàn với chu kỳ $l = 2$ trên $[-1,1]$ thành chuỗi Fourier

BÀI GIẢI

Trước hết ta nhận thấy rằng hàm $f(x) = x^2$ tuần hoàn với chu kỳ $l = 2$

Và các hệ số Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x dx = 2\left[\int_{0}^{1} x^2 \cos n\pi x dx\right]\ldots$$

$$= \left((-1)^n \frac{4}{\pi^2 n^2}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x dx = \int_{-1}^{1} x^2.\sin n\pi x dx = 0$$

Vậy tại $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left[\cos\pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \ldots (-1)^n \frac{\cos n\pi}{n^2} + \ldots\right]$$

d) Khai triển hàm bất kỳ thành chuỗi Fourier

Giả sử $f\left(x\right)$ là hàm bất kỳ xác định trên $[a,b]$ và thoả mãn giả thiết của định lý Dirichle, khi đó muốn khai triển hàm $f\left(x\right)$ thành chuỗi thì ta phải xây dựng hàm $g\left(x\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T \geq |b-a|$ sao cho $g\left(x\right) = f\left(x\right), \forall x \in \left[a,b\right]$.

Và nếu $g\left(x\right)$ khai triển được thành chuỗi $g\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\left(x\right)$ thì khi đó hàm $f\left(x\right)$ cũng khai triển được thành chuỗi : $f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\left(x\right); \quad \forall x \in \left[a,b\right]$ và trừ tại những điểm mà $f\left(x\right)$ gián đoạn.

VÍ DỤ **7** Viết khai triển Fourier của hm số

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

BÀI GIẢI

Gọi g là hàm tuần hoàn với chu kì T=3 sao cho g(x)=f(x) với $x \in [0,3]$. Ta có hệ số Fourier của g là

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}} g(x)dx = \frac{2}{3}\int_0^3 g(x)dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx = \frac{2}{3}\left[\int_0^1 xdx + \int_1^2 dx + \int_2^3 (3-x)dx\right] = \frac{4}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}} g(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx = \frac{2}{3}\int_0^3 g(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx = \frac{3}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-1\right); n = 1,2,3...$$

$b_n = 0$ (vì g là hàm chẵn).

Do đó $g(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3} \qquad (x \in R)$.

Vậy $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3} \qquad (x \in [0,3])$.

VÍ DỤ 8 Khai triển $f(x) = 1$ trên $[-\pi, 0]$ thành chuỗi sin .

BÀI GIẢI

Mở rộng $f(x)$ thành hàm $F(x)$ là hàm lẻ trên đoạn $[-\pi,\pi]$ sao cho $F(x) = f(x)$ trên đoạn $[-\pi, 0]$. Khi đó, $F(x)$ có thể khai triển thành chuỗi sin .

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ -\dfrac{4}{n\pi} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

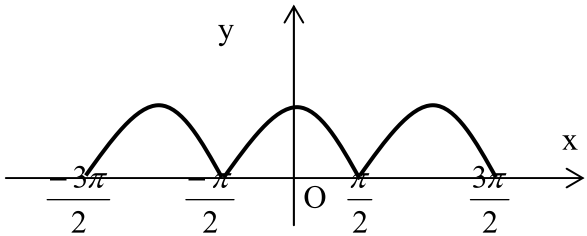
Do đó, $\begin{cases} b_{2n} = 0 \\ b_{2n-1} = -\dfrac{4}{n\pi} \end{cases}, \quad n = 1,2,3,\ldots$

$$\Rightarrow \quad F(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \qquad (-\pi \le x \le \pi)$$

Vậy $f(x) = 1 = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \qquad (-\pi \le x \le 0).$

VÍ DỤ 9 Khai triển hàm $f(x) = |\cos x|$ thành chuỗi Fourier.

BÀI GIẢI



Hàm số đã cho liên tục trên R, tuần hòan với chu kì π đơn điệu từng khúc và bị chặn nên chuỗi Fourier của nó hội tụ.

Ta tính các hệ số Fourier:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\cos x|dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\cos x|.\cos 2nx dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x.\cos 2nx dx = \frac{4}{\pi}.\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \; (n = 1,2,3,...)$$

$b_n = 0 \quad (n = 1,2,3,...)$ vì f là hàm số chẵn trên $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Vậy khai triển Fourier của hàm số đã cho là

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx \quad , \forall x \in R.$$

VÍ DỤ 10 Khai triển $f(x) = x$ trên đoạn $[-3,0]$ thành chuỗi $\sin$.

BÀI GIẢI

Ta mở rộng $f(x)$ thành hàm $F(x)$ là hàm lẻ trên đoạn $[-3,3]$ sao cho $F(x) = f(x)$ trên đoạn $[-3,0]$. Khi đó, $F(x)$ có thể khai triển thành chuỗi $\sin$.

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi}{3}xdx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} F(x)\sin\frac{n\pi}{3}xdx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-3}^{0} x\sin\frac{n\pi}{3}xdx$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin\dfrac{n\pi}{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{3}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi}{3}x \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad b_n = \frac{2}{3}\left[-\frac{3x}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}x\Big|_{-3}^{0} + \int_{-3}^{0}\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}xdx\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[-\frac{9}{n\pi}\cos n\pi + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin n\pi\right]$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{6}{n\pi} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \dfrac{6}{n\pi} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases} = (-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}.$$

Vậy $x = \dfrac{6}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}x \qquad (-3 \le x \le 0).$

BÀI TẬP CHƯƠNG V

5.1 Tính tổng của các chuỗi số sau: (nếu có)

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n+1)}$

b) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Hướng dẫn

Chuỗi số chỉ có tổng khi nó hội tụ. Phương pháp tính tổng của chuỗi thường dùng nhất là dùng định nghĩa, tính tổng riêng thứ n là S_n sau đó tổng $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

5.2 Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n.\sin\frac{\pi}{2n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(n+1)!}{(3n)!}$

Hướng dẫn

1) Trước hết kiểm tra điều kiện cần:

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ thì kết luận ngay chuỗi phân kỳ

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ thì chưa có kết luận gì và phải xét tiếp .

2) Trước hết phải xét xem chuỗi đã cho là chuỗi DƯƠNG, hay ĐAN DẤU, hay DẤU BẤT KỲ.

3) * Nếu là chuỗi Dương (có 7 PP): theo ***ĐN***, theo ***tiêu chuẩn Cauchy***, đặc biệt là theo 5 dấu hiệu ***so sánh 1, so sánh 2, D'lambert, Cauchy, Tích phân***.

* Nếu chuỗi Đan dấu thì có 3PP: theo ***ĐN***, theo ***tiêu chuẩn Cauchy***, đặc biệt theo ***dấu hiệu Leibnitz.***

* Nếu chuỗi đan dấu hoặc chuỗi có dấu bất kỳ đưa về chuỗi số dương bằng cách xét ***chuỗi trị tuyệt đối.***

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \to \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \ \textit{là chuỗi dương}$$

5.3 Sử dụng Dấu hiệu Leibnitz để xét sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n^2-5}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)\ln n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

5.4 Tìm bán kính hội tụ, và sau đó tìm miền hội tụ của các chuỗi luỹ thừa sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{4^n(2n-1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{n^2.4^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x)^n}{n!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^{2n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-7}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(x-4)^n tg\frac{1}{2^n}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{4^n(2n-1)}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2 3^n}$ j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)4^n}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2n+3}$ p) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{n^2+1}x^n$

q) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{5^n+1}$ m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{2n^3}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{n^2+2}$ s) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3n+4}x^n$

5.5 Khai triển các hàm số sau thành chuỗi luỹ thừa:

a) $f(x)=\sin^2 x$

b) $f(x)=e^x\cos x$

c) $f(x)=\ln\left(x^2-5x+6\right)$

5.6 Biết hàm số sau tuần hoàn với chu kì 2π, hãy khai triển thành chuỗi Fourier

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\pi & , \quad -\pi<x<0\\ \pi-x, & \quad 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$$b)\ f(x)=x^2 \quad , 0\le x<2\pi$$

5.7 Khai triển hàm số sau thành chuỗi Fourier

$$a)\ f(x)=x-\frac{x^2}{2} \text{ trên } [0,2]$$

$$b)\ f(x)=\begin{cases}1 & , \quad -1<x<0\\ x & , \quad 0\le x\le 1\end{cases} \text{ và}$$

$$f(x+2)=f(x)\,, \quad x\in R$$

5.8 a) Khai triển $f(x)=x(\pi-x),\ 0<x<\pi$ thành chuỗi Fourier theo sin.

b) Khai triển $f(x)=\begin{cases}x & , \ 0<x\le 1\\ 2-x & , \ 1<x\le 2\end{cases}$ thành chuỗi Fourier theo cos.

5.9 Tìm khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ trên khoảng $(-\pi,\pi)$

Đáp số: $f(x)\sim\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}\cos nx$

5.10 Tìm khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số $f(x)=\begin{cases} 0 & , -1\le x<0 \\ 1-x & , 0<x\le 1 \end{cases}$ trên khoảng $(-1,1)$

Đáp số:

$$f(x)\sim \frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\left(1-(-1)^n\right)\cos n\pi x+n\pi\sin n\pi x\right]$$

5.11 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x & , 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ \pi-x & , \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi \end{cases}$

Hãy tìm chuỗi cosin của hàm số này trên miền xác định của nó.

Đáp số: $f(x)\sim \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos 2(2n-1)x$

5.12 Cho hàm số $f(x)=\pi-x$

a) Tìm khai triển Fourier của $f(x)$ trên khoảng $(-\pi,\pi)$.

b) Tìm chuỗi cosin của $f(x)$ trên đoạn $[0,\pi]$.

c) Tìm chuỗi sin của $f(x)$ trên nửa khoảng $(0,\pi]$

ĐỀ THI THAM KHẢO

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN

Môn thi: **Toán Cao Cấp A1 (khối kỹ thuật)**

Thời gian: **90 phút**

(Sinh viên không sử dụng tài liệu)

Câu 1 (2,0 điểm) Định m để hàm số

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x-3}-2x+5}{x-3} & \text{, khi } x\neq 3 \\ m & \text{, khi } x=3 \end{cases}$$

liên tục tại điểm x = 3

Câu 2 (2,0 điểm) Tìm khai triển Maclaurin của hàm $f\left(x\right)=x\left(e^{2x}-e^{-x}\right)$ đến số hạng x^4

Câu3 (2,0điểm) Xét sự hội tụ của tích phân

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\ dx$$

Câu 4 (2,0 điểm) Tìm cực trị của hàm số sau

$$z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$$

Câu 5 (2,0 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+5\right)^{2n}}{n^2.4^n}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Toán cao cấp -chủ biên PGS. TS Lê Văn Hốt

Trường đại học Kinh tế TP HCM

2.Hướng dẫn giải bài tập Toán cao cấp

chủ biên PGS. TS Lê Văn Hốt

Trường đại học Kinh tế TP HCM

3. Toán cao cấp cho nhà kinh tế -Lê Đình Thúy

Trường đại học Kinh tế quốc dân Hà nội

4. Toán cao cấp tập -chủ biên Nguyễn Đình Trí

5. Bài tập Toán cao cấp tập -chủ biên Nguyễn Đình Trí